DIKTAT KULIAH

ANALISIS REAKTOR NUKLIR

Penyusun:

Dr. Alexander Agung, S.T., M.Sc.

PROGRAM STUDI TEKNIK NUKLIR

DEPARTEMEN TEKNIK NUKLIR DAN TEKNIK FISIKA
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS GADJAH MADA
2017

HALAMAN PENGESAHAN

1.	Nama Mata Kuliah	: Analisis Reaktor Nuklir
2.	Kode/SKS/Sifat	: TKN 4505/3 SKS/Pilihan Penguatan TEN
3.	Kurikulum	: 2016
4.	Penyusun	: Dr. Alexander Agung, S.T., M.Sc.
5.	Tahun Penyusunan	: 2017

Mengetahui:
Ketua Departemen Teknik Nuklir
& Teknik Fisika

Nopriadi, S.T., M.Sc., Ph.D
NIP. 197311192002121002

Penyusun

Dr. Alexander Agung, S.T., M.Sc.
NIP. 197209161998031002

Kata Pengantar

Bahan ajar ini dimaksudkan untuk membantu mahasiswa peserta kuliah Analisis Reaktor Nuklir agar dapat memahami materi perkuliahan secara lebih mudah. Cakupan maateri perkuliahan yang ditulis dalam bahan ajar ini disusun berdasarkan pengalaman penulis mengajar mata kuliah tersebut sejak tahun 2005 dan telah disesuaikan dengan cakupan pada kurikulum Program Studi Teknik Nuklir 2016.

Pada dasarnya materi yang tertuang di diktat ini merupakan kelanjutan dari materi yang telah diperoleh oleh mahasiswa ketika mengikuti mata kuliah Fisika Reaktor Nuklir. Materi pada perkuliahan Analisis Reaktor Nuklir dimulai dari pembahasan mengenai perhitungan banyak zona satu kelompok energi, akan tetapi dalam bahan ajar ini pembahasan diawali dengan dasar-dasar reaksi nuklir dan transport neutron sebagai *refreshing* bagi mahasiswa. Materi kemudian dilanjutkan dengan perhitungan banyak kelompok beserta metode homogenisasi. Selanjutnya pembahasan terkait kegayutan terhadap waktu juga dibahas, baik itu berupa kinetika maupun dinamika reaktor titik.

Diktat ini merupakan pengembangan dari catatan perkuliahan. Sangat dimungkinkan terdapat kesalahan di beberapa tempat baik itu kesalahan tipo maupun secara konseptual. Oleh karena itu koreksi dari para pembaca sangat diharapkan. Materi ini selanjutnya akan terus dilengkapi seiring dengan kegiatan perkuliahan dan disesuaikan dengan kebutuhan dan perkembangan teknologi.

Yogyakarta, 17 Agustus 2017

(Dr. Alexander Agung, S.T., M.Sc.)

R P K P S

A. DESKRIPSI MATAKULIAH

1. Nama Matakuliah : ANALISIS REAKTOR NUKLIR
2. Kode : TKN 4505
3. SKS : 3
4. Semester : Ganjil
5. Sifat : Pilihan Penguatan Teknologi Energi Nuklir
6. Matakuliah prasyarat : Pernah mengambil Fisika Reaktor Nuklir

B. SASARAN MATA KULIAH

TKN 4505 adalah mata kuliah pilihan penguatan Teknologi Energi Nuklir yang dianjurkan untuk diambil oleh mahasiswa tingkat S1 pada tahun ketiga. Di dalam kurikulum, mata kuliah ini menghubungkan prinsip-prinsip fisis dasar, konsep-konsep dan teknik-teknik pemodelan untuk menganalisis dan mendesain reaktor nuklir. Mata kuliah ini menyiapkan mahasiswa untuk dapat menganalisis reaktor nuklir termasuk di dalamnya aspek-aspek kinerja, dinamika dan keamanan dan untuk membangun desain baru maupun mengkaji desain-desain yang ada maupun yang diusulkan berdasarkan kepada pemahaman fundamental fisika reaktor.

C. PRASYARAT MENURUT TOPIK

1. Dasar fisika inti yang diterapkan pada teknik nuklir
2. Teori difusi neutron, teori perlambatan, syarat-syarat kekritisan yang diterapkan pada reaktor homogen polos
3. Sistem persamaan linear, nilai diri dan vektor diri
4. Persamaan diferensial parsial

D. SILABUS MATAKULIAH

Persamaan difusi satu grup untuk reaktor banyak daerah. Persamaan difusi multigroup dan metode penyelesaiaannya. Pengaruh heterogenitas material terhadap parameter persamaan difusi. Pengertian konsep reaktivitas. Perubahan reaktivitas. Kinetika dan dinamika reaktor nuklir. Deplesi bahan bakar nuklir. *Code* dan *software* perhitungan reaktor nuklir. Metode perhitungan parameter neutronik terkait dengan keselamatan, keamanan dan *safeguard* nuklir.

E. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah menempuh mata kuliah ini mahasiswa diharapkan mampu memahami:

a. difusi satu grup untuk reaktor banyak daerah.
b. difusi netron multigrup.
c. pengaruh heterogenitas material di dalam teras terhadap parameter persamaan difusi.
d. konsep reaktivitas, kinetika dan dinamika reaktor nuklir beserta pengendalian reaktivitas.
e. deplesi dan konversi bahan bakar serta peracunan produk fisi.
f. dasar pemodelan dan desain reaktor nuklir.

F. PENGGUNAAN KOMPUTER

Sebagian besar pekerjaan rumah membutuhkan penyelesaian analitis. Penggunaan software sebagai alat bantu, misal EXCEL, MATLAB, MATHEMATICA, OCTAVE, sangat dianjurkan. Untuk pengenalan *code* dan pendalaman konsep-konsep fisika reaktor digunakan TRITON/NEWT.

G. STRUKTUR MATA KULIAH

1. *Tatap muka dan catatan kuliah*
   Tatap muka akan mencakup semua topik mata kuliah. Catatan kuliah akan diberikan baik itu berupa *slide* maupun diktat. Mahasiswa akan mendapatkan materi kuliah sebelum tatap muka diselenggarakan dan dapat diakses dari eLisa. Dengan demikian mahasiswa dapat mempelajari terlebih dahulu materi yang akan diajarkan dan porsi diskusi di dalam kelas dapat dimaksimalkan.

2. *Pekerjaan rumah*
   Pekerjaan rumah akan diberikan di setiap akhir topik.

3. *Simplified reactor design problem (SRDP)*
   RDP akan diberikan sebagai tambahan terhadap PR dan diselesaikan menggunakan TRITON/NEWT. Permasalahan yang diajukan dimaksudkan untuk meningkatkan pemahaman kepada topik yang telah diajarkan serta memberikan dasar pengetahuan tentang penggunaan *code* neutronik serta dasar-dasar perancangan reaktor nuklir.

4. *Quiz*
   Quiz akan diberikan untuk memfasilitasi dan meningkatkan proses pembelajaran. Setiap quiz terdiri dari 1 – 3 pertanyaan teoretis berdasarkan materi dari tatap muka sebelumnya dan dikerjakan dalam waktu sekitar 10 menit (open book). Quiz akan diberikan secara acak dan tanpa pemberitahuan sebelumnya. Dimungkinkan juga quiz diberikan secara online menggunakan fasilitas yang tersedia pada eLisa.

5. *Ujian Tengah Semester (UTS)*
   UTS diselenggarakan sesuai jadwal ujian yang telah ditetapkan dan berupa ujian tertulis. Sifat ujian adalah buku terbuka. Cakupan materi ujian adalah semua materi yang diberikan sampai dengan pertemuan terakhir sebelum UTS.

6. *Ujian Akhir Semester (UAS)*
   UAS diselenggarakan dalam dua tahap:
   a. Ujian lisan
      Ujian lisan dimaksudkan untuk mengetahui sejauh mana pemahaman mahasiswa terhadap keseluruhan materi kuliah. Pertanyaan terkait dengan teori dan konsep-konsep fisika reaktor. Ujian bersifat **closed book** dengan cakupan materi ujian adalah semua materi yang diberikan dari awal perkuliahan sampai dengan pertemuan terakhir sebelum UAS.
   b. Ujian tertulis
      Ujian tertulis dimaksudkan untuk mengetahui kemampuan analitis mahasiswa. Ujian bersifat **open book** dengan cakupan materi ujian adalah semua materi yang diberikan setelah UTS sampai dengan pertemuan terakhir sebelum UAS.

H. ALOKASI WAKTU

Metode Pembelajaran	Alokasi waktu	Persentase (%)
Ceramah dan diskusi	: 12x 2 jam = 24 jam	28,57
Presentasi	: 2 x 2 jam = 4 jam	4,76
Studi mandiri (mempelajari materi, membaca manual TRITON/NEWT (SCALE), *browsing* internet, dll)	: 12 x 2 jam = 24 jam	28,57
Mengerjakan Pekerjaan Rumah (PR)	: 7 x 2 jam = 14 jam	16,67
Mengerjakan tugas SRDP	: 9 x 2 jam = 18 jam	21,43
Total	**84 jam**	**100**

I. KOMPETENSI SESUAI DENGAN MATRIKS KOMPETENSI YANG DISASAR

SO 1 : Kemampuan menerapkan pengetahuan matematika, sains, teknik dasar dan teknik nuklir

SO 3 : Kemampuan merancang sistem, komponen, dan proses nuklir untuk memenuhi kebutuhan masyarakat dengan memperhatikan sumberdaya lokal dalam kerangka keselamatan, keamanan, keberlanjutan dan mendukung komitmen nasional dalam pemanfaatan energi nuklir.

SO 4 : Kemampuan mengidentifikasi, merumuskan, dan memecahkan persoalan keteknikan.

SO 5 : Kemampuan menggunakan perangkat lunak dan perangkat keras yang diperlukan dalam kegiatan profesinya.

J. LEARNING OUTCOMES

Komponen Luaran	Kompetensi	R	U	Ap	An	E	C
LO 1. Mampu menyusun model difusi satu grup untuk reaktor satu daerah dan banyak daerah.	SO 1			√			
LO 2. Mampu menyelesaikan permasalahan dalam kerangka teori difusi satu grup untuk reaktor satu daerah dan banyak daerah.	SO 1				√		
LO 3. Mampu menjelaskan pengertian *self-shielding*, faktor rugi termal, faktor penggunaan termal dan probabilitas lolos resonansi.	SO 4		√				

LO 4.	Mampu menghitung faktor rugi termal dan probabilitas lolos resonansi dengan berbagai metode.	SO 1 SO 4				√		
LO 5.	Mampu mengidentifikasi pengaruh heterogenitas material di dalam teras terhadap parameter neutronika.	SO 3 SO 4				√		
LO 6.	Mampu menyusun persamaan difusi neutron multigrup.	SO 1			√			
LO 7.	Mampu menghitung distribusi neutron dan faktor multiplikasi pada kondisi ajeg menggunakan metode difusi multigrup.	SO 1 SO 4				√		
LO 8.	Mampu menjelaskan pengertian reaktivitas beserta satuannya dan koefisien reaktivitas seperti FTC, MTC, koefisien tekanan dan koefisien void.	SO 4		√				
LO 9.	Mampu menurunkan persamaan kinetika reaktor tanpa dan dengan neutron kasip.	SO 1			√			
LO 10.	Mampu menyelesaikan kinetika reaktor titik pada berbagai kondisi reaktor (subkritis, kritis, superkritis) terhadap input yang berbeda.	SO 1				√		
LO 11.	Mampu menyusun model dinamika reaktor dengan umpan balik.	SO 4			√			
LO 12.	Mampu mengidentikasi perilaku dinamis reaktor.	SO 4				√		
LO 13.	Mampu menjelaskan pengaruh deplesi dan konversi bahan bakar serta peracunan produk fisi terhadap reaktivitas reaktor.	SO 4		√				
LO 14.	Mampu mendeskripsikan langkah-langkah desain reaktor dan metode penyelesaiannya dari sisi neutronika.	SO 3		√				
LO 15.	Mampu menggunakan *code* neutronik untuk perhitungan tingkat *lattice*, *assembly* dan *core*.	SO 5			√			
LO 16.	Mampu membandingkan hasil perhitungan *code* neutronik dengan hasil perhitungan alternatif maupun data eksperimen.	SO 5				√		

Keterangan:
(R) Recognizing; (U) Understanding; (Ap) Applying; (An) Analyzing; (E) Evaluating; (C) Creating.

K. RENCANA KEGIATAN MINGGUAN

Minggu ke-	Topik	Substansi	Learning Outcomes	Bentuk Pembe-lajaran	Bacaan (nomor halaman)		
					Stacey	Duderstadt & Hamilton	Lamarsh
1	**Teori Difusi**	**Perhitungan kekritisan dengan teori difusi 1 kelompok untuk reaktor nuklir homogen 1 daerah**	**LO 1 LO 2**	**TM, SGD**	**43 - 61**	**149 - 210**	**118 - 164**
2	**Reaktor banyak daerah**	**Difusi satu kelompok pada reaktor dua daerah; *Reflector savings***		**TM, SGD, PR**	**62 – 64**	**211 – 214**	**318 – 323 354 – 358**
3	**Moderasi Neutron**	**Pengertian letargi, rapat perlambatan, konsep perlambatan tanpa serapan serta penyusunan persamaan Fermi tanpa serapan. Dasar-dasar perhitungan serapan resonansi**	**LO 6 LO 7**	**TM**	**101 – 111 117 - 127**	**317 - 347**	**165 - 241**
4	**Difusi multigrup 1**	**Teori difusi multigrup; solusi analitis problem difusi 2 grup**		**TM, SGD**	**127 – 129**	**286 –301**	**346 – 352**
5	**Difusi multigrup 2**	**Penentuan konstanta grup; Solusi numerik problem difusi multigrup**		**TM, SGD, PR**	**129 – 137**	**301 – 307**	**-**
6	**Reaktor heterogen 1**	***Spatial self-shielding*, faktor rugi termal, faktor penggunaan termal, Perhitungan faktor rugi termal dengan metode difusi dan ABH**	**LO 3 LO 4 LO 5**	**TM, SGD**	**68 – 76**	**399 – 405**	**370 - 389**

Minggu ke-	Topik	Substansi	Learning Outcomes	Bentuk Pembe-lajaran	Bacaan (nomor halaman)		
					Stacey	Duderstadt & Hamilton	Lamarsh
7	**Reaktor heterogen 2**	**Perhitungan kementakan lolos resonansi; Parameter multiplikasi reaktor heterogen; Teori difusi untuk batang kendali**		**TM, SGD, PR**	**515 – 518 65 - 73**	**406 – 415 547 – 551**	**390 – 411**
8	**Ujian Tengah Semester**						
9	**Kinetika Titik**	**Penurunan persamaan kinetika titik dengan neutron kasip; Inhour equation; Periode stabil**	**LO 9**	**TM, SGD, PR**	**143 - 148**	**233 - 240**	**417 - 428**
10	**Operasi reaktor tanpa umpan balik**	**Kondisi subkritis, kritis dan superkritis; Respons terhadap perubahan reaktivitas undak dan linear gayut waktu**	**LO 10 LO 12**	**TM, SGD, PR**	**150 – 154**	**240 - 257**	**428 - 447**
11	**Umpan balik reaktivitas**	**Koefisien reaktivitas: FTC, MTC, koefisien tekanan, koefisien *void;* model umpan balik suhu.**	**LO 11 LO 12**	**TM, SGD, PR**	**161 – 167 183 – 190**	**257 – 262 556 – 563**	**448 – 466**
12	**Peracunan produk fisi**	**Peracunan xenon dan samarium; racun tidak uniform; osilasi xenon.**	**LO 12 LO 13**	**TM, SGD, PR**	**211 – 216**	**566 – 580**	**467 – 478**
13	***Burnup* dan konversi**	**Persamaan produksi – destruksi nuklida; efek reaktivitas perubahan komposisi bahan bakar**	**LO 12 LO 13**	**TM, SGD, PR**	**197 - 211**	**580 – 588**	**479 – 485**
14	**Pengendalian reaktivitas**	***Control rod worth; burnable poison; chemical shim***	**LO 13**	**TM, SGD, PR**	**73 – 76**	**537 – 556**	**497 – 502**
15	**Perhitungan numerik**	**Pemodelan dan perhitungan tingkat sel menggunakan TRITON/NEWT**	**LO 15 LO 16**	**TK**			
16	**Ujian Akhir Semester**						

Keterangan:
TM : Tatap muka; SGD : *Small Group Discussion;* PR : Pekerjaan Rumah;
TK : Tugas Kelompok

L. ATURAN PERKULIAHAN

1. Pelaksanaan kuliah
    a. Mahasiswa diminta hadir tepat waktu. Toleransi keterlambatan adalah 15 menit. Lebih dari 15 menit mahasiswa tidak diizinkan memasuki ruang kelas.
    b. Keterlambatan dosen lebih dari 15 menit berarti kuliah ditiadakan.
    c. Perubahan jadwal dikarenakan ketidakhadiran dosen (bukan karena terlambat) akan diberitahukan sebelumnya dan akan diadakan kuliah pengganti dengan waktu yang menyesuaikan dengan kegiatan mahasiswa dan dosen.
    d. Selama perkuliahan berlangsung, mahasiswa mematuhi tata tertib dan aturan umum yang berlaku di Jurusan Teknik Fisika:
        i. Berpakaian sopan (mengenakan kemeja atau kaos berkerah dan celana panjang yang rapi bagi mahasiswa).
        ii. Memakai sepatu

    Jika pelanggaran terhadap aturan umum tersebut dilakukan, dosen mempunyai wewenang untuk mengeluarkan mahasiswa yang bersangkutan dari ruang kuliah.

2. Pekerjaan rumah
    a. Untuk setiap PR yang dikumpulkan:
        i. Tuliskan nomer tugas pada halaman sampul dan sertakan pula tugas yang diberikan pada halaman pertama.
        ii. Gunakan hanya halaman depan dari setiap lembar (tidak bolak-balik).
        iii. Sertakan pernyataan permasalahan secara singkat.
        iv. Tulisan rapi dan mudah dibaca serta gunakan alur logika yang bagus sehingga mudah untuk diikuti dan dikoreksi.
        v. Jika diminta untuk menampilkan hasil numeris/angka, berikan rumus dan angkanya beserta satuannya.
    b. Dalam mengerjakan pekerjaan rumah, bekerja secara berkelompok sangat dianjurkan. Mahasiswa diminta untuk berdiskusi dengan temannya. Nama teman yang berpartisipasi dalam diskusi dituliskan juga pada halaman sampul tugas yang dikumpulkan. Akan tetapi, tugas yang dikumpulkan harus merupakan hasil usaha individu. **Jika diketahui pekerjaan yang sama karena mengkopi pekerjaan temannya, nilai tugas menjadi 0 untuk semua mahasiswa yang terlibat.**
    c. Semua tugas dikumpulkan di awal perkuliahan pada tanggal yang telah ditentukan.
    d. Tugas yang terlambat tidak diterima tanpa ada penjelasan yang dapat diterima tentang keterlambatan.
        i. Jika mahasiswa tidak dapat mengumpulkan tugas pada tanggal yang telah ditentukan, dia mempunyai waktu 1 minggu setelah tanggal tersebut untuk menjelaskan alasan keterlambatan dan meminta waktu pengumpulan yang baru.
        ii. Tergantung dari penjelasan yang diberikan dan catatan pengumpulan tugas mahasiswa, tanggal pengumpulan yang baru dapat diberikan atau ditolak (dalam hal ini pekerjaan yang terlambat tidak dapat diterima).

iii. Jika mahasiswa gagal menghubungi dosen dalam waktu 1 minggu setelah tanggal yang ditentukan, tugas yang terlambat tidak dapat diterima. Tidak ada pengecualian.

e. Tugas tidak akan diterima setelah tatap muka terakhir.

f. Jika mahasiswa mengerjakan kembali tugasnya dan mengumpulkannya dalam waktu satu minggu setelah mengumpulkan tugas aslinya, mahasiswa dapat meningkatkan nilainya minimal 10% dari nilai asli (sampai dengan 100% tergantung dari orisinalitasnya). Hanya satu kali pengumpulan ulang untuk setiap tugas yang diperbolehkan.

M. KOMPONEN PENILAIAN

Komponen	Bobot (%)
Tugas individu	20
Tugas kelompok komputasi	20
Ujian tengah semester	30
Ujian akhir semester	30

N. RENTANG NILAI AKHIR

Nilai Total	Konversi Nilai
80 – 100	A
75 – 79,9	B+
70 – 74,9	B
65 – 69,9	C+
55 – 64,9	C
50 – 54,9	D
< 50	E

O. REFERENSI

Textbook

1. Duderstadt, J.J., Hamilton, L.J., *Nuclear Reactor Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
2. Lamarsh, J.R., *Introduction to Nuclear Reactor Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
3. Stacey, W.M., *Nuclear Reactor Physics*, John Wiley & Sons, New York, 2003.

Code documentation:

1. *Scale: A Comprehensive Modeling and Simulation Suite for Nuclear Safety Analysis and Design*, ORNL/TM-2005/39, Version 6.1, June 2011.
2. Ade, B.J., *SCALE/TRITON Primer: A Primer for Light Water Reactor Lattice Physics Calculations*, NUREG/CR-7041, November 2012.

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Bab 1

Reaktor Nuklir dan Reaksi Nuklir

During my life I have witnessed extraordinary feats of human ingenuity. I believe that this struggling ingenuity will be equal to the task of creating the Second Nuclear Era. My only regret is that I will not be here to witness its success.

ALVIN WEINBERG

Learning outcomes :

- Mampu menjelaskan prinsip reaktor nuklir
- Mampu menjelaskan reaksi antara neutron dengan materi
- Mampu menjelaskan kegayutan tampang lintang terhadap energi

Minggu ke : 1 (review)

1.1. Prinsip Reaktor Nuklir

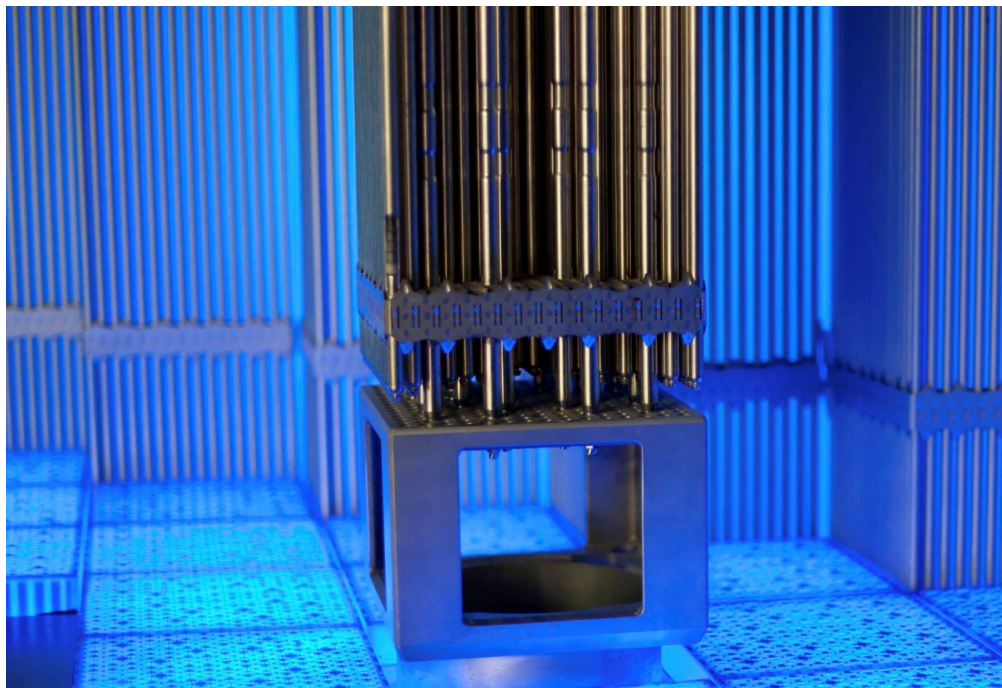
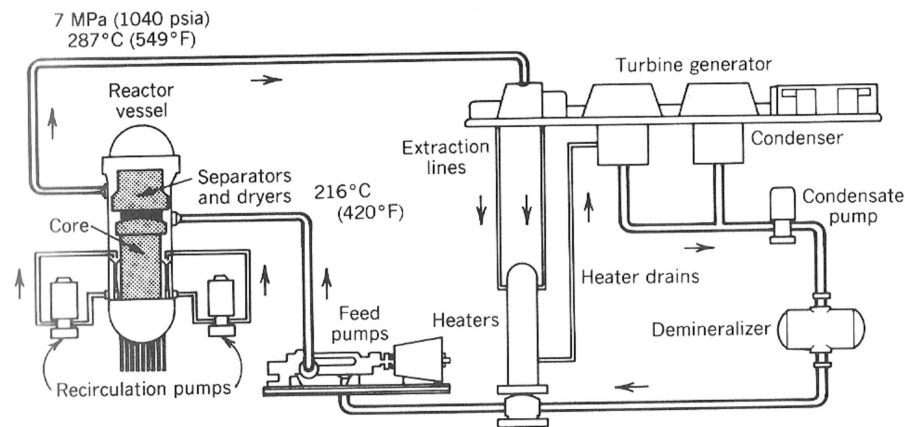
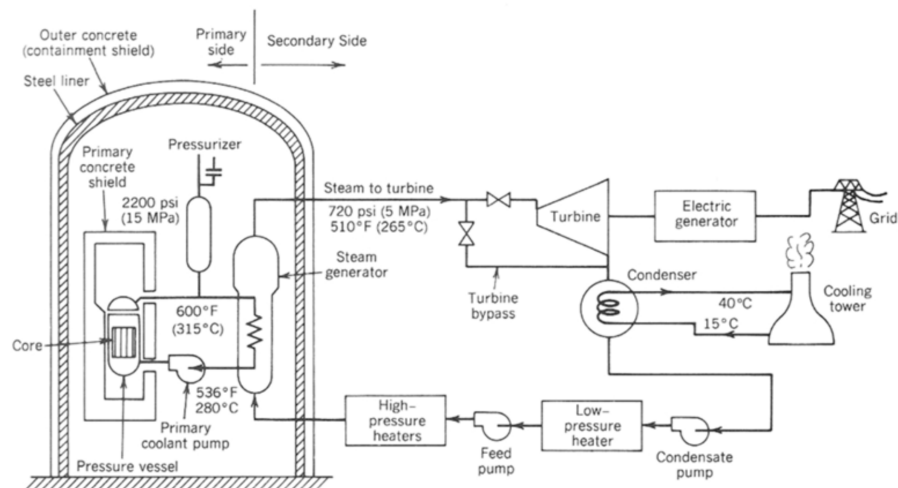
PADA reaktor nuklir, inti atom yang berat (misalnya $_{92}U^{235}$) dapat dibelah menjadi dua bagian oleh neutron, di mana dihasilkan energi yang relatif besar serta neutron-neutron baru yang selanjutnya dapat menyebabkan proses pembelahan inti. Jika satu neutron yang dihasilkan dari pembelahan inti tersebut menyebabkan pembelahan inti yang baru, akan dihasilkan reaksi berantai yang stasioner, di mana dibangkitkan energi yang berlanjutan. Reaksi fisi ini akan melepaskan energi kira-kira sebesar 200 MeV (1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J). Dibandingkan dengan reaksi kimia di mana hanya

dilepaskan energi sebesar beberapa eV saja (sebagai contoh bandingkan dengan pembakaran 1 m^3 gas alam dengan kandungan energi sebesar 30 MJ), pelepasan energi dari reaksi fisi ini sangat besar.

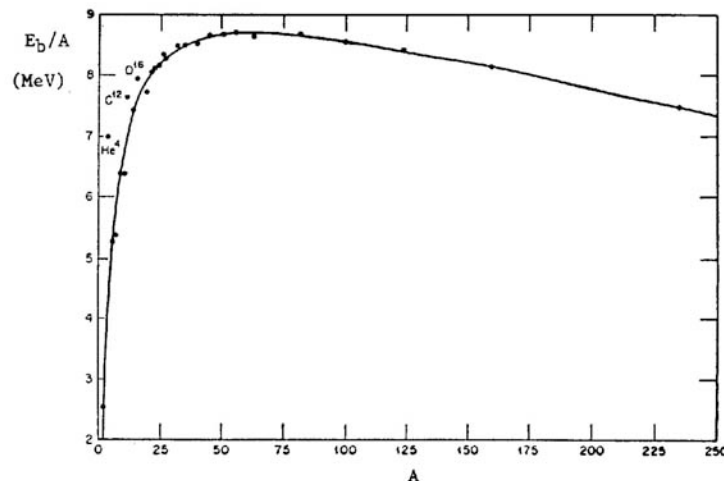
Meskipun dimungkinkan untuk melakukan reaksi berantai pada $_{92}U^{235}$ berbentuk bola yang sedikit lebih besar daripada bola tenis, akan tetapi struktur seperti itu tidak cocok untuk membangkitkan sejumlah besar energi. Orang harus menggunakan pendingin untuk dapat mengambil kalor yang dibangkitkan secara efektif dan sejumlah besar uranium harus ditempatkan di teras reaktor. Di samping itu, di alam tidak ditemukan $_{92}U^{235}$ murni. Kandungan dari uranium alami yang ditemukan pada kerak bumi terdiri dari isotop-isotop $_{92}U^{234}$, $_{92}U^{235}$ dan $_{92}U^{238}$ dengan persentase berat tercantum seperti pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1. *Kandungan uranium alam.*

Isotop	Persen Berat	Nomor Massa	Waktu Paro
$_{92}U^{234}$	0,006%	234,0409	$2{,}4.10^5$ tahun
$_{92}U^{235}$	0,712%	235,0439	$7{,}0.10^8$ tahun
$_{92}U^{238}$	99,282%	238,0508	$4{,}5.10^9$ tahun

Dari tabel tersebut kita dapat memahami mengapa persentase $_{92}U^{235}$, derajat pengkayaan, menjadi sangat penting. Untuk alasan ekonomi, orang memilih derajat pengkayaan sebesar 3% untuk bahan bakar reaktor nuklir. Teras reaktor disusun dengan meletakkan sejumlah besar elemen bahan bakar di dalam bejana reaktor yang besar. Sebuah elemen bahan bakar terdiri dari sejumlah batang yang panjang dengan uranium (biasanya dalam bentuk UO_2) disusun membentuk kisi persegi dengan pendingin (biasanya air) mengalir di antaranya. Agar terhindar dari reaksi kimia antara pendingin dengan bahan bakar nuklir, bahan bakar nuklir diselubungi di dalam kelongsong logam.

Gambar 1.1. *Elemen bahan bakar di dalam reaktor.*

Gambar 1.2. *Sketsa reaktor air didih (BWR).*

Gambar 1.3. *Sketsa reaktor air tekan (PWR).*

Gambar 1.1 menunjukkan bentuk dari perangkat bahan bakar. Kalor yang dibangkitkan di dalam bahan bakar nuklir ditransfer ke air pendingin yang dipompa ke atas melalui batang-batang bahan bakar. Air dapat mendidih ketika mengalir ke atas. Uap yang dihasilkan selanjutnya dialirkan ke turbin uap di mana sudu-sudu turbin digerakkan dan dihasilkan rotasi. Sumbu turbin kemudian menggerakkan generator listrik yang membangkitkan energi listrik dan mengirimkannya ke jaringan listrik. Uap yang telah diekspansi dari turbin selanjutnya dikondensasi dan kemudian air yang dihasilkan dipompa kembali ke teras. Air pendingin yang biasanya diambil dari sungai atau laut digunakan untuk mengkondensasi uap. Menara pendingin bisa juga digunakan untuk membantu proses kondensasi. Gambar 1.2 menunjukkan skema dari reaktor jenis air didih (Boiling Water Reactor atau BWR).

Pada reaktor air tekan atau PWR (lihat Gambar 1.3), tekanan air dipertahankan lebih tinggi sehingga pendidihan pada teras tidak terjadi. Air yang panas dialirkan ke pembangkit uap (*steam generator*) di mana kalor dipindahkan ke air pada sisi sekunder yang bertekanan lebih rendah sehingga terjadi pendidihan. Uap yang dihasilkan kemudian dialirkan ke turbin.

Gambar 1.4. *Energi ikat per nukleon sebagai fungsi nomer massa A.*

Air pada reaktor air didih atau air tekanan tidak hanya berfungsi sebagai pendingin saja, melainkan juga untuk menurunkan energi neutron. Neutron yang dihasilkan dari reaksi pembelahan mempunyai energi yang tinggi, padahal kemungkinan untuk menimbulkan reaksi pembelahan yang baru lebih besar apabila neutron mempunyai energi yang rendah. Dengan tumbukan dengan inti atom yang ringan seperti hidrogen di air, neutron akan kehilangan energi. Dengan demikian air juga bertindak sebagai moderator.

Akhirnya neutron mendapatkan distribusi energi yang sesuai dengan gerakan inti atom. Oleh karena itu, reaktor yang menggunakan moderator disebut juga dengan *reaktor termal*. Pada reaktor yang tidak menggunakan moderator, neutron berada pada tingkat energi yang tinggi. Reaktor yang semacam ini disebut dengan *reaktor cepat*.

Pada seksi setelah ini kita akan mempelajari proses fisi untuk memahami mengapa energi dapat dilepaskan pada pembelahan inti dan mengapa hanya inti atom tertentu saja yang dapat digunakan. Selanjutnya interaksi-interaksi yang memungkinkan antara neutron dengan inti atom akan dibahas dan probabilitas interaksinya akan dikuantifikasi. Pada bab setelah ini, sebuah persamaan yang mendeskripsikan transpor neutron di dalam teras reaktor dapat diturunkan. Dari penyelesaian persamaan ini (atau bentuk penyederhanaan dari persamaan), syarat-syarat yang harus dipenuhi dapat diturunkan agar reaksi inti berantai yang berkelanjutan dapat terjadi.

1.2. Proses Pembelahan

Proton dan neutron pada inti atom diikat oleh gaya inti (gaya kuat). Oleh karena itu diperlukan energi untuk memecah inti menjadi partikel-partikel nuklir atau *nukleon*. This binding energy of a nucleus is obtained by imaginary composition of the nucleus from the separate nucleons, karena massa kesuluruhan inti atom adalah lebih kecil daripada jumlahan massa masing-masing nukleon. Menurut relasi Einstein $E = mc^2$, yang disebut dengan *mass defect* ini telah dikonversi menjadi energi potensial yaitu energi ikat, E_b. untuk inti atom dengan A nukleon (A disebut dengan nomor massa), nilai energi ikat per nukleon, E_b/A dapat dihitung. Nilai ini ditunjukkan di Gambar 1.4 sebagai fungsi dari nomer massa.

Untuk nomer massa yang rendah, energi ikat naik dengan cepat, dengan beberapa ketidakteraturan pada kasus inti-inti ringan. Energi ikat ini mencapai nilai maksimum sebesar 8,8 MeV pada $A = 60$ dan kemudian turun perlahan-lahan. Dari Gambar 1.4 tersebut, tampak jelas bahwa energi dapat dihasilkan dari fusi atau penggabungan inti-inti ringan atau dari fisi inti-inti berat.

Energi ikat inti atom sebagai fungsi nomer massa A dan banyaknya proton Z dapat dinyatakan dengan persamaan semi-empiris berikut ini:

$$E_b(\mathrm{MeV}) = 15,76A - 17,81A^{2/3} - 0,711\frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23,072\frac{(N-Z)^2}{A} \pm 34A^{-3/4} \tag{1.1}$$

Arti fisis dari persamaan ini akan kita bahas suku per suku. Mengingat bahwa gaya tarik-menarik antar nukleon hanya berlaku untuk tetangga langsung nukleon, suku pertama dari Pers. (1.1) akan sebanding dengan banyaknya nukleon A pada inti atom. Kita dapat menyebutnya sebagai *suku volume*. Akan tetapi di sini kita mengabaikan partikel pada permukaan inti tidak sepenuhnya dikelilingi oleh partikel-partikel yang lain. Konsekuensinya, taksiran energi ikat menjadi lebih tinggi yang nilainya sebanding dengan luas permukaan inti atom. Analogi dengan tetesan cairan, efek ini dinyatakan sebagai *efek tegangan permukaan*. Suku ini (*suku permukaan*) harus sebanding dengan luasan permukaan, $A^{2/3}$. Suku ketiga dihubungkan dengan interaksi coulomb antar proton yang memperkecil energi ikat karena tolak-menolak antara muatan bertanda sama. Energi potensial dari bola bermuatan listrik sebanding dengan Z^2/R, di mana R sebanding dengan $A^{1/3}$, yang menghasilkan suku ketiga (*suku coulomb*).

Dua suku terakhir pada Pers. (1.1) tidak dapat dideskripsikan secara "klasik" sebagaimana halnya tiga suku pertama. Pada inti-inti atom terdapat kecenderungan untuk membentuk kelompok pasangan-pasangan neutron/proton. Terutama pada inti-inti ringan, kita dapat melihat bahwa inti ringan dengan banyaknya proton dan neutron yang sama adalah sangat stabil. Akan tetapi, inti-inti stabil yang lebih berat mempunyai lebih banyak neutron daripada proton. Kelebihan neutron ini diperlukan agar gaya tarik-menarik antar neutron dan antara neutron dan proton dapat digunakan untuk mengkompensasi gaya tolak-menolak antar proton (suku ketiga). Akan tetapi pada saat yang bersamaan ketidakstabilan muncul karena kelebihan neutron memenuhi sejumlah tingkat energi pada inti yang tidak terisi oleh proton. Untuk itu faktor koreksi yang disebut dengan *suku simetri* harus dimunculkan yang juga penting pada kasus kelebihan proton. Untuk itu suku ini berbentuk kuadratik dari $N - Z$.

Suku terakhir disebut dengan *suku pasangan* yang memperhitungkan adanya momen spin dari momentum nukleon atau "spin". Efek spin ini dinyatakan dari fakta bahwa inti-inti dengan banyaknya proton yang genap ("even") dan banyaknya neutron yang genap adalah sangat stabil dikarenakan adanya "spin yang berpasangan". Apabila inti atom terdiri dari banyaknya proton maupun neutron yang ganjil ("odd"), inti tersebut hampir selalu tidak stabil kecuali ${}_1\mathrm{H}^2$, ${}_3\mathrm{Li}^5$, ${}_5\mathrm{B}^{10}$ dan ${}_7\mathrm{N}^{14}$. Untuk suku kelima ini, berlaku aturan sebagai berikut:

inti "even/even"	:	suku pasangan *positif*
inti "odd/odd"	:	suku pasangan *negatif*
inti "even/odd" atau "odd/even"	:	suku pasangan = 0

Dengan bantuan Pers. (1.1), energi ikat dapat dihitung dengan cukup akurat dan energi ikat maksimum dapat ditentukan pada nilai A berapa untuk nilai Z tertentu atau dengan kata lain nuklida yang mempunyai stabilitas tertinggi (sebagai contoh $_{13}\text{Al}^{27}$ dan $_{28}\text{Ni}^{64}$).

Tabel 1.2 menunjukkan pengaruh dari berbagai efek terhadap energi ikat untuk inti atom ringan, sedang dan berat.

Tabel 1.2. *Energi ikat (dalam MeV) untuk beberapa nuklida.*

Efek	$_{20}\text{Ca}^{40}$	$_{47}\text{Ag}^{107}$	$_{92}\text{U}^{238}$
suku volume	630	1686	3751
suku permukaan	-208	-401	-684
suku coulomb	-83	-331	-971
suku simetri	0	-37	-290
suku pasangan	+2	0	+0,6
E_b terhitung	341	917	1806
E_b terukur	342	915	1802
E_b/A terukur	8,6	8,6	7,6

Dari Gambar 1.4 kita dapat melihat bahwa jika membelah inti $_{92}\text{U}^{235}$ menjadi dua bagian, energi ikat dari fragmen-fragmen ($A \approx 120$) bersama-sama lebih besar daripada energi ikat inti awal, di mana *kira-kira* $235 \times (8,5 - 7,6) \approx 200$ MeV dilepaskan. Persamaan umum yang menentukan besarnya energi yang dilepaskan dari reaksi fisi adalah sebagai berikut

$$E_f = 1,299927 \times 10^{-3} Z^2 A^{0,5} + 33,12 \quad \text{MeV/fisi} \tag{1.2}$$

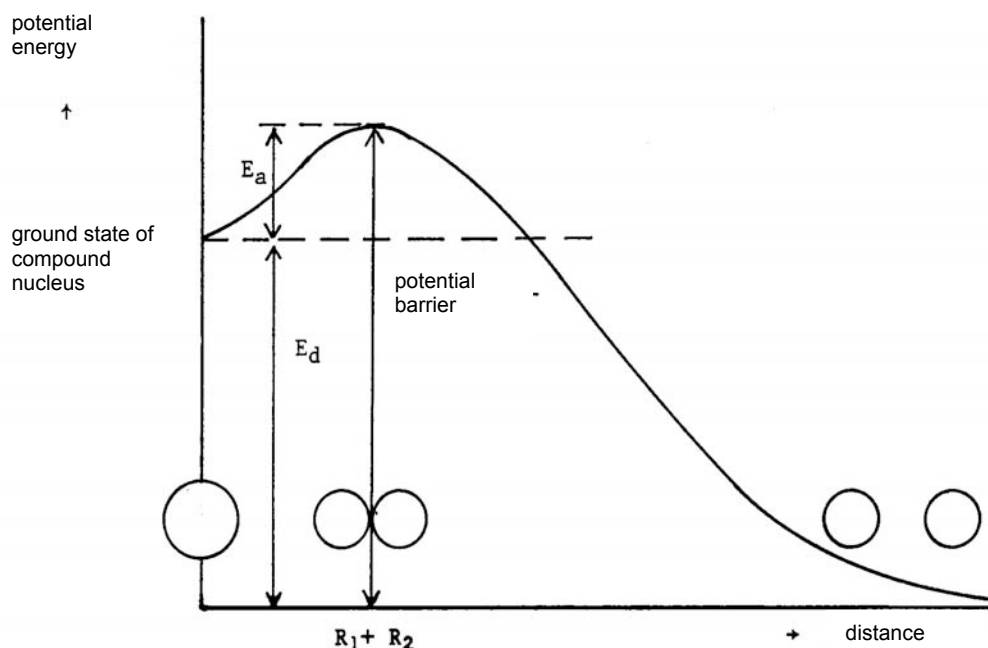
Proses fisi meliputi pembelahan sebuah inti atom menjadi bagian-bagian yang secara kasar hampir sama besar. Pada dasarnya, sembarang inti, jika dibawa ke keadaan energi tereksitasi yang cukup tinggi, dapat dibelah. Banyaknya energi eksitasi yang dibutuhkan untuk dapat menyebabkan fisi nuklir dapat diperkirakan dari besarnya penghalang elektrostatis dan energi disosiasi dari fisi yang bersangkutan.

Pada Gambar 1.5, energi potential antara dua fragmen fisi digambarkan sebagai fungsi dari jarak antara pusat keduanya. Tinggi dari penghalang potensial dapat diperkirakan dari

$$E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \tag{1.3}$$

di mana R_1 dan R_2 adalah radius dari masing-masing inti dan ϵ_0 adalah permitivitas vakum. Di sebelah kiri dari nilai maksimum, “bound state” terjadi sebagai akibat dari gaya-gaya nuklir.

Energi disosiasi E_d sama dengan beda antara energi ikat inti gabungan dengan jumlahan energi ikat fragmen-fragmen fisi dan dapat diperkirakan dari Pers. (1.1). Dengand demikian, energi aktivasi minimum E_a yang harus ditambahkan ke inti atom untuk menghasilkan fisi sebesar $E_c - E_d$.

Ketika massa sebuah inti atom lebih besar daripada jumlahan massa fragmen-fragmen yang dihasilkan ketika inti tersebut dipisahkan, inti atom tersebut mempunyai kecenderungan menuju ketidakstabilan, karena fisi disertai dengan pelepasan energi. Kecenderungan ini ada pada inti-inti yang cukup jauh dari energi ikat maksimum pada Gambar 1.4, yaitu untuk $A > 100$. Akan tetapi, karena energi aktivasi E_a

Gambar 1.5. *Energi potential sebagai fungsi jarak antara dua fragmen fisi.*

nuklida-nuklida dengan nomer massa di bawah 230 adalah sangat besar, fisi secara spontan dadi nuklida-nuklida ini tidak terjadi. Untuk $A > 260$, E_a bernilai negatif sehingga inti-inti ini mempunyai umur radioaktif yang sangat singkat. Tabel 1.3 menunjukkan energi aktivasi minimum untuk fisi pada sejumlah inti atom.

Tabel 1.3. *Nilai energi (dalam MeV) yang penting untuk fisi*

	nomer massa A					
	16	60	100	140	200	236
Penghalang potensial E_c	4	32	62	110	175	210
Energi disosiasi E_d	-12,7	-16	15	48	135	205
Energi aktivasi E_a	18,5	48	47	62	50	-5

Energi eksitasi dapat ditambahkan ke inti atom dengan membombardir inti atom dengan foton atau partikel. Dengan menggunakan sinar gamma, kita dapat menentukan nilai E_a. Sebagai contoh nilai-nilai berikut ini diperoleh

U^{236} : $E_a = 5,3$ MeV

U^{239} : $E_a = 5,5$ MeV

Metode yang paling atraktif untuk menghasilkan fisi adalah dengan membentuk inti gabungan dengan bantuan neutron. Dengan serapan neutron, baik energi kinetik maupun energi ikat neutron menjadi memungkinkan untuk membawa inti gabungan menjadi keadaan tereksitasi, sementara tidak ada gaya coulomb yang harus diatasi seperti halnya pada partikel bermuatan. Jika keadaan tereksitasi pada diagram energi pada Gambar 1.5 di atas penghalang potensial, maka fisi dapat terjadi. Dengan menerapan

Pers. (1.1) kita dapatkan bahwa dengan serapan neutron pada $_{92}\mathrm{U}^{235}$, besarnya energi ikat menjadi

$$E_b(\mathrm{U}^{236}) - E_b(\mathrm{U}^{235}) = 6,6 \text{ MeV}$$

Pada kasus $_{92}\mathrm{U}^{238}$, kita dapatkan

$$E_b(\mathrm{U}^{239}) - E_b(\mathrm{U}^{285}) = 5,1 \text{ MeV}$$

Dari sini bisa kita lihat bahwa untuk membelah $_{92}\mathrm{U}^{238}$ neutron harus mempunyai energi kinetik minimum sebesar $5,5 - 5,1 = 0,4$ MeV, sementara serapan neutron tanpa energi kinetik sudah dapat menyebabkan fisi pada $_{92}\mathrm{U}^{235}$. Secara umum, inti-inti berat dengan banyak neutron yang ganjil ($_{92}\mathrm{U}^{233}$, $_{92}\mathrm{U}^{235}$, $_{94}\mathrm{Pu}^{239}$) dapat dengan mudah dibelah karena karena neutron yang diserap untuk membentuk inti gabungan dengan inti-inti ini adalah neutron "genap" sehingga energi ikat karena efek pasangan menjadi besar. Di lain pihak, inti "genap" yang berat ($_{90}\mathrm{Th}^{232}$, $_{92}\mathrm{U}^{238}$, $_{94}\mathrm{Pu}^{240}$, $_{94}\mathrm{Pu}^{242}$) mempunyai ambang energi untuk fisi oleh neutron, karena neutron yang diserap adalah neutron "ganjil" yang membuat energi ikat relatif kecil. Fisi untuk nuklida-nuklida ini dengan demikian merupakan reaksi dengan ambang.

Ketika inti atom tereksitasi di atas penghalang potensial, fisi tidak harus selalu terjadi. Bisa juga energi eksitasi terdisipasi karena emisi gamma. Pada kasus semacam ini, reaksi yang terjadi disebut sebagai reaksi tangkapan (*capture reaction*) atau reaksi (n,γ). Reaksi semacam ini memperburuk berlangsungnya reaksi berantai pada reaktor.

Selama reaksi fisi spontan, beberapa neutron segera dilepaskan sebagai akibat kelebihan neutron pada produk fisi. Rata-rata banyaknya neutron yang dilepaskan (ν) bertambah seiring dengan naiknya energi eksitasi, atau dengan kata lain seiring dengan naiknya energi kinetik neutron yang diserap. Sebagai contoh, untuk $_{92}\mathrm{U}^{235}$ banyaknya neutron yang dilepaskan dinyatakan dengan

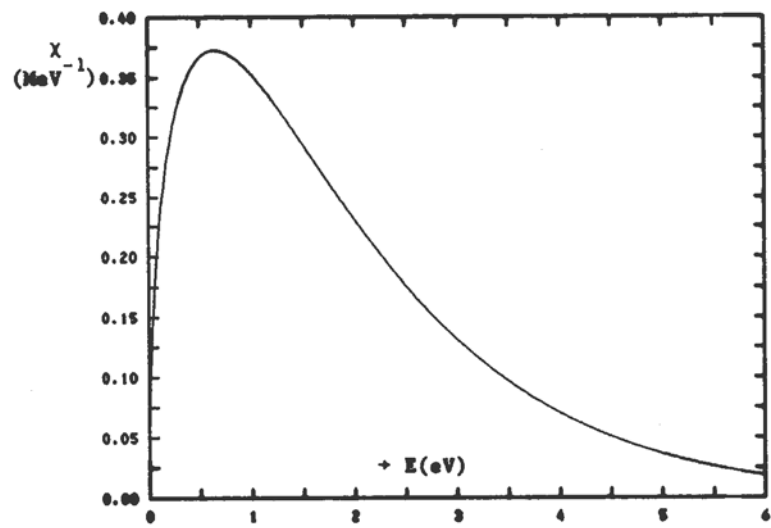
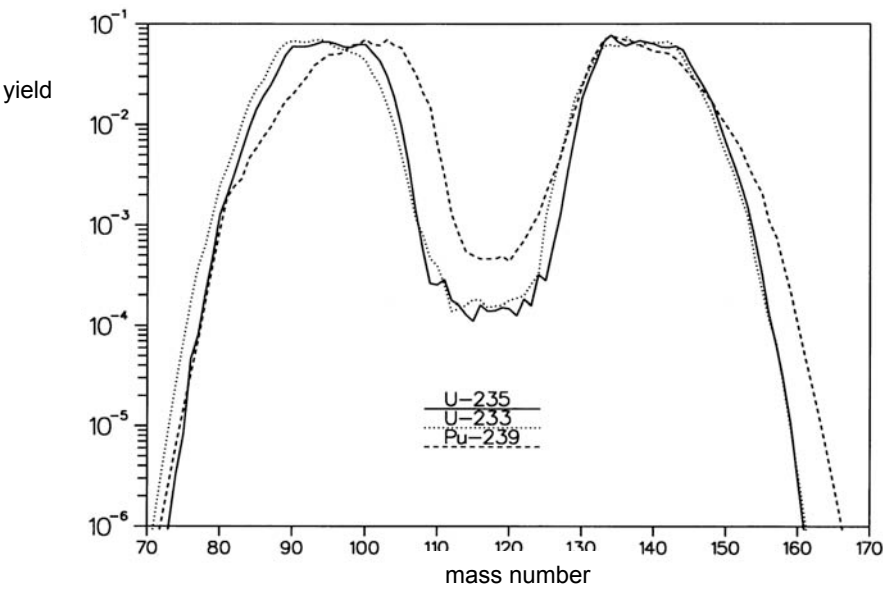
$$\nu(E) = 2,44 + 0,095E \quad (\text{MeV}) \tag{1.4}$$

dengan E adalah energi kinetik neutron dalam MeV.

Neutron yang dilepaskan selama proses fisi mempunyai distribusi seperti tampak pada Gambar 1.6, dengan bentuk analitik dapat dituliskan sebagai berikut

$$\chi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\sqrt{E}e^{-E/T} \tag{1.5}$$

dengan T adalah suhu fiktif yang dinyatakan dalam satuan energi ($T = 1,3$ MeV) dan $\chi(E)dE$ adalah fraksi neutron yang mempunyai energi di antara E dan $E + dE$. Energi rata-rata neutron adalah $\frac{3}{2}T \approx 2$ MeV.

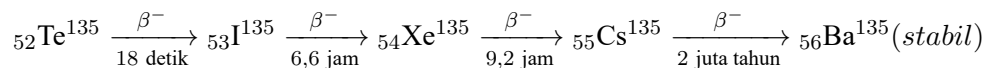
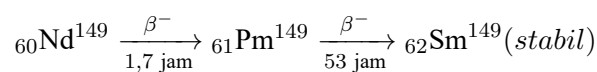
Terdapat sekitar 60 produk fisi utama dengan *yield* per fisi terdistribusi sesuai dengan "kurva unta" seperti tampak pada Gambar 1.7. Dari gambar tersebut tampak adanya kecenderungan fisi asimetris. Produk fisi utama, yang masih berada pada keadaan sangat tereksitasi, kehilangan kelebihan energinya melalui proses peluruhan. Hal ini dapat terjadi dengan emisi foton dan neutron. Ketika energi eksitasi menjadi lebih kecil daripada energi ikat neutron pada fragmen-fragmen fisi, emisi neutron serentak ber-

Gambar 1.6. *Spektrum fisi* $_{92}U^{235}$.

Gambar 1.7. Yield *produk fisi.*

henti dan energi yang tersisa akan dilepaskan dalam bentuk foton yang disebut dengan radiasi gamma serentak (*prompt gamma radiation*).

Setelah kembali ke keadaan dasar (*ground state*), fragmen-fragmen fisi masih bersifat tidak stabil. Karena fragmen-fragmen ini masih mempunyai kelebihan neutron, jelas bahwa sebagian besar fragmen akan meluruh menjadi keadaan yang lebih stabil melalui emisi β. Terkadang peluruhan β banyak tingkat diperlukan untuk mendapatkan inti yang stabil. Sebagai contoh:

$$_{52}\mathrm{Te}^{135} \xrightarrow[\text{18 detik}]{\beta^-} {_{53}\mathrm{I}^{135}} \xrightarrow[\text{6,6 jam}]{\beta^-} {_{54}\mathrm{Xe}^{135}} \xrightarrow[\text{9,2 jam}]{\beta^-} {_{55}\mathrm{Cs}^{135}} \xrightarrow[\text{2 juta tahun}]{\beta^-} {_{56}\mathrm{Ba}^{135}} (stabil)$$

atau

$$_{60}\mathrm{Nd}^{149} \xrightarrow[\text{1,7 jam}]{\beta^-} {_{61}\mathrm{Pm}^{149}} \xrightarrow[\text{53 jam}]{\beta^-} {_{62}\mathrm{Sm}^{149}} (stabil)$$

Bagian terbesar energi yang dihasilkan selama fisi (sekitar 80%) berupa energi kinetik fragmen fisi. Bagian yang lain terdistribusi pada energi kinetik neutron dan energi radiasi. Jumlah energi total sekitar 203 MeV per fisi, terdistribusi seperti tampak pada Tabel 1.4. Pada sebuah reaktor, per fisi sekitar 195 MeV dapat diperoleh yang berasal dari energi total dikurangi dengan energi neutrino. Akan tetapi, proses tangkapan neutron pada reaktor akan menghasilkan tambahan energi sehingga energi total yang tersedia menjadi sekitar 200 MeV per fisi. Hal ini berarti sekitar $3,1 \cdot 10^{10}$ fisi per detik diperlukan untuk menghasilkan daya sebesar 1 W dan pembakaran 1 g uranium menghasilkan energi sebesar 1 MWd (megawatt day).

Tabel 1.4. *Distribusi energi selama fisi.*

	Energi (MeV)
Energi kinetik fragmen fisi	169,85
Radiasi γ serentak	6,96
Energi kinetik neutron fisi	4,79
Energi γ produk fisi	6,26
Energi β produk fisi	6,43
Neutrino	8,68
Total	202,70

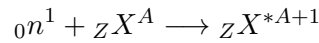
1.3. Reaksi Inti dan Tampang Lintang

Inti atom dapat mengalami interaksi dengan inti-inti yang lain, partikel-partikel dasar (proton, neutron, elektron) dan radiasi elektromagnetik (foton). Di bidang fisika reaktor kita dapat membatasi pembahasan hanya pada interaksi dengan neutron saja yang tidak mengalami gaya tolak coulomb dikarenakan sifat netralitas kelistrikannya. Untuk mendeskripsikan interaksi neutron-nukleus, model "inti gabungan" yang diusulkan oleh Bohr pada tahun 1936 dapat digunakan. Menurut model ini dua fase yang berurutan dapat dikenali pada reaksi inti:

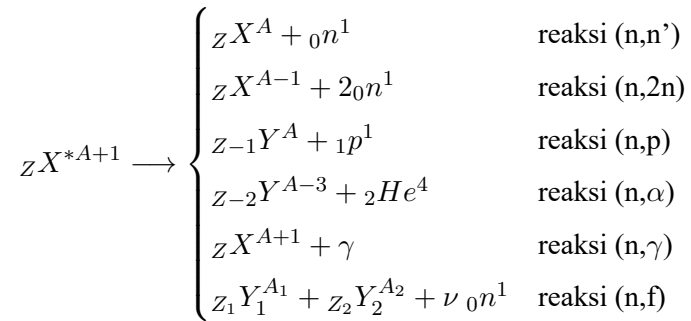
1. Partikel yang datang diserap oleh inti atom dan membentuk inti gabungan.

2. Dalam waktu yang singkat inti gabungan tersebut mengalami disintegrasi dengan memancarkan sebuah partikel yang tidak harus sama dengan partikel yang datang.

Karena partikel diserap oleh inti target, sejumlah energi akan ditambahkan ke inti gabungan yang sama dengan energi ikat partikel ditambah energi kinetik partikel ini. Karena kekekalan momentum harus dipenuhi, sebagian dari energi total dikonversi menjadi energi kinetik inti gabungan sementara energi yang tersisa menyebabkan inti gabungan mencapai keadaan energi tinggi. Bagian pertama dari reaksi ini dapat dituliskan sebagai berikut

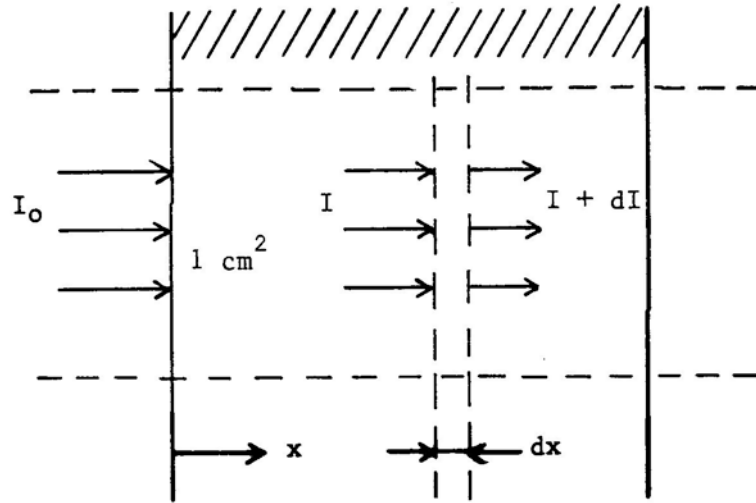
$$_0n^1 + {}_ZX^A \longrightarrow {}_ZX^{*A+1}$$

Pada persamaan di atas tanda bintang menunjukkan bahwa inti gabungan berada pada keadaan tereksitasi. Segera setelah pembentukan inti gabungan, semua energi terkonsentrasi di sekitar partikel yang ditangkap. Sebagai konsekuensi dari interaksi antara partikel inti, energi ini akan dengan cepat tersebar ke semua partikel di dalam inti. Pembagian energi ini mempunyai sifat statistik di mana dimungkinkan sebuah partikel mendapatkan energi yang lebih besar daripada energi ikatnya. Inti gabungan kemudian dapat kehilangan kelebihan energinya dengan memancarkan partikel tersebut. Kita telah membahas sebelum ini bahwa untuk inti-inti yang sangat berat dimungkinkan energi terdistribusi sedemikian rupa sehingga terjadi dua fragmen: fisi nuklir. Kelebihan energi juga dapat diemisikan dalam bentuk radiasi elektromagnetik (foton). Dalam hal ini orang mengatakannya sebagai reaksi (n,γ).

Fase kedua dari interaksi neutron-inti dapat dituliskan sebagai berikut:

$$_ZX^{*A+1} \longrightarrow \begin{cases} _ZX^A + {}_0n^1 & \text{reaksi (n,n')} \\ _ZX^{A-1} + 2{}_0n^1 & \text{reaksi (n,2n)} \\ _{Z-1}Y^A + {}_1p^1 & \text{reaksi (n,p)} \\ _{Z-2}Y^{A-3} + {}_2He^4 & \text{reaksi (n,}\alpha\text{)} \\ _ZX^{A+1} + \gamma & \text{reaksi (n,}\gamma\text{)} \\ _{Z_1}Y_1^{A_1} + {}_{Z_2}Y_2^{A_2} + \nu\, {}_0n^1 & \text{reaksi (n,f)} \end{cases}$$

Pada reaksi (n,n') atau hamburan inelastis, sebagian dari energi eksitasi dipancarkan dalam bentuk radiasi gamma. Reaksi terakhir adalah reaksi fisi. Pada reaksi ini harus terpenuhi syarat $Z_1 + Z + 2 = Z$ dan $A_1 + A_2 + \nu = A + 1$.

Inti atom yang tersisa setelah berlangsung reaksi ini pada banyak kasus tidak stabil dan akan berubah menjadi inti yang lebih stabil dengan memancarkan partikel β dan/atau γ, di mana foton juga seringkali dilepaskan.

Untuk interaksi neutron-inti digunakan pembagian sebagai berikut:

$$\text{reaksi neutron-inti} \begin{cases} \text{hamburan} \begin{cases} \text{hamburan elastis} \\ \text{hamburan inelastis} \end{cases} \\ \text{serapan} \begin{cases} \text{tangkapan} \\ \text{fisi} \end{cases} \end{cases}$$

Gambar 1.8. *Transmisi neutron melalui plat.*

Konsep tentang tampang lintang mikroskopik dimunculkan untuk menyatakan probabilitas reaksi neutron-inti. Anggap pancaran neutron yang seragam dengan intensitas sebesar I cm^{-2} s^{-1} mengenai "lapisan" tipis atom (dengan ketebalan satu lapis atom) sebesar N_a atom/cm^2. Banyaknya interaksi C per cm^2 per detik akan sebanding dengan intensitas I dan densitas atom N_a. Kita mendefinisikan faktor kesebandingan ini sebagai tampang lintang mikroskopik σ.

$$C \equiv \sigma N_a I \tag{1.6}$$

Tampang lintang mikroskopik sering dinyatakan dalam satuan "barn" (1 b = 10^{-24} cm^2). Dari definisi ini kita dapat membayangkan σ sebagai "luasan target" efektif inti yang "dilihat" oleh neutron. Tampang lintang mikroskopis umumnya tergantung pada energi neutron dan jenis reaksi. Sesuai dengan skema sebelumnya, kita dapat membedakan

$$\sigma_t \begin{cases} \sigma_s \begin{cases} \sigma_{se} \\ \sigma_{si} \end{cases} \\ \sigma_a \begin{cases} \sigma_c(\sigma_{n\gamma} + \sigma_{np} + \sigma_{n\alpha} + \ldots) \\ \sigma_f \end{cases} \end{cases}$$

Agar dapat mendefinisikan konsep "tampang lintang mikroskopik", titik awal kita adalah lapisan tipis atom-atom. Agar dapat menentukan tampang lintang mikroskopis, pengukuran transmisi dilakukan terhadap plat material. Berangkat dari asumsi bahwa tidak ada fisi atau hamburan yang terjadi, atenuasi neutron pada plat dengan ketebalan x dapat dihitung (lihat Gambar 1.8).

Anggap bahwa I_o neutron per cm^2 per second mengenai plat secara tegak lurus. Plat tersebut mempunyai densitas atom sebesar N inti per cm^3. Pada lapisan setebal dx pada plat, densitas inti atom per

satuan luas adalah $N_a = Ndx$. Menurut definisi tampang lintang mikroskopis, laju reaksi per satuan luas adalah sebesar $N\sigma I(x)dx$. Nilai ini sama dengan pengurangan intensitas pancaran, sehingga

$$-dI = N\sigma I dx \tag{1.7}$$

Dengan mengintegralkan Pers. (1.7) kita dapatkan

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} \tag{1.8}$$

Tampang lintang mikroskopis σ mengacu kepada satu inti atom. Hasil kali

$$\Sigma = N\sigma \tag{1.9}$$

mengacu kepada satu cm^3 material dan disebut dengan tampang lintang makroskopis. Nama ini sebenarnya kurang tepat karena ia tidak menyatakan tampang lintang dan mempunyai dimensi L^{-1}. Dari Pers. (1.8) dapat diketahui probabilitas $P(x)$ bahwa neutron akan bergerak menempuh jarak x pada material yang bersangkutan tanpa mengalami reaksi adalah sebesar

$$P(x) = e^{-\Sigma x} \tag{1.10}$$

Probabilitas bahwa neutron akan mengalami reaksi pada jarak antara x dan $x+dx$ adalah sama dengan Σdx, sehingga jarak bebas rerata atau *mean free path*, λ, menjadi

$$\lambda = \int_0^\infty x e^{-\Sigma x} \Sigma dx = \frac{1}{\Sigma} \tag{1.11}$$

di mana kita dapat membedakan λ_s, λ_s, dst. Kuantitas ini juga disebut dengan *panjang relaksasi* (*relaxation length*) karena ia menyatakan jarak di mana intensitas neutron yang tidak mengalami reaksi telah berkurang sebesar faktor e kali.

Jika ρ menyatakan densitas material dengan nomer massa A, berlaku pernyataan berikut ini

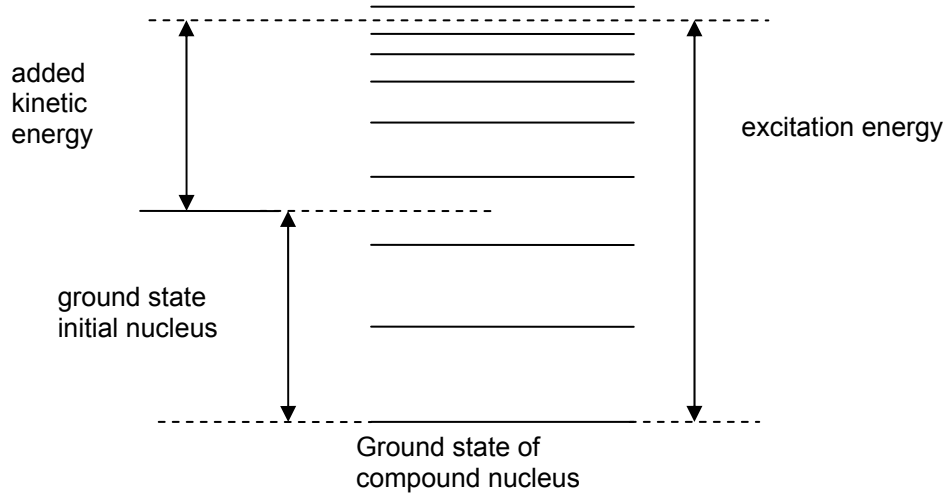
$$N = \frac{\rho}{A} N_a \tag{1.12}$$

dengan N_a adalah bilangan Avogadro $= 6,022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. Jika kita mempunyai campuran inti-inti atom, tampang lintang makroskopis campuran dapat dinyatakan dengan

$$\Sigma_{campuran} = \sum_i N_i \sigma_i \tag{1.13}$$

dengan N_i menyatakan banyaknya inti atom jenis ke-i per cm^3 pada campuran yang bersangkutan.

1.4. Kegayutan Tampang Lintang terhadap Energi

Di samping keadaan dasar (*ground state*), inti atom juga mempunyai tingkat energi yang lebih tinggi yang dapat dieksitasi. Tingkat energi terendah pada inti gabungan yang terbentuk dari interaksi neutron-

Gambar 1.9. *Diagram energi interaksi neutron-inti.*

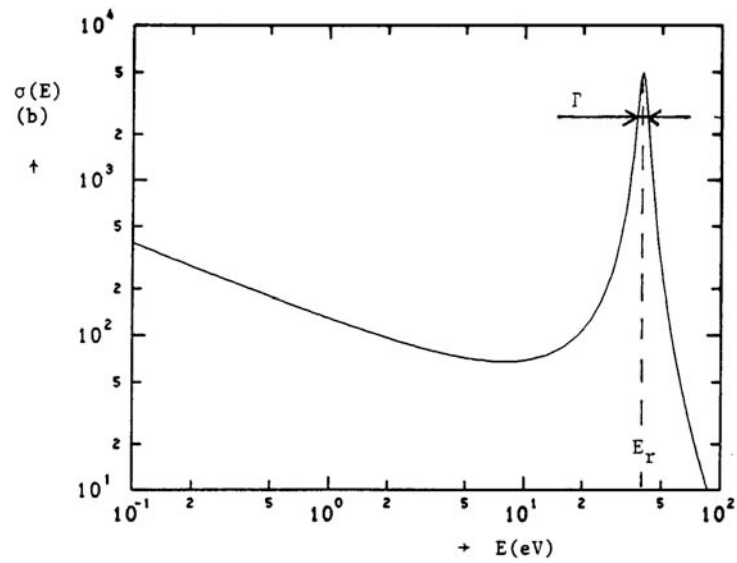
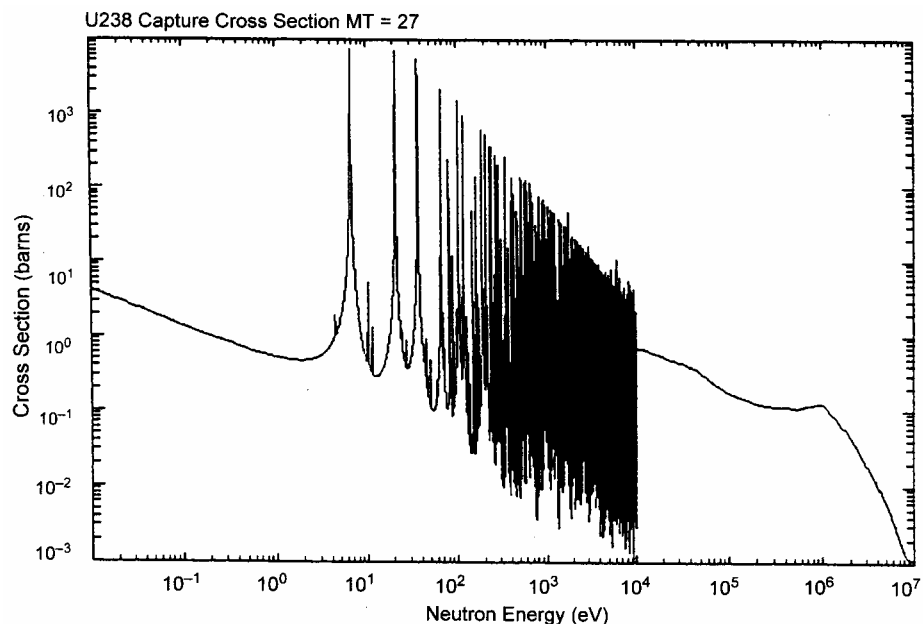
inti terpisah agak jauh, sebagai contoh untuk inti dengan berat yang menengah ($A = 100 - -150$), kira-kira sebesar 0,1 MeV. Tingkat energi yang tinggi makin lama makin dekat. Untuk energi eksitasi sebesar 8 MeV seperti pada kasus setelah tangkapan neutron dengan energi kinetik yang rendah, pemisahan antara tingkat energi hanya sebesar 1–10 eV. Gambar 1.9 menunjukkan skema posisi tingkat energi selama pembentukan inti gabungan.

Tingkat energi inti atom tidak berupa “garis-garis” yang tajam, melainkan menunjukkan lebar tertentu sebesar Γ, yang menurut prinsip ketidakpastian Heisenberg terkait dengan waktu rata-rata sebelum inti pada keadaan tereksitasi akan meluruh dengan memancarkan foton atau partikel yang lain. Jika terdapat beberapa kemungkinan peluruhan untuk inti gabungan (pancaran foton, neutron, dll atau fisi), kita dapat membedakan lebar tingkat parsial Γ_γ, Γ_n, Γ_f, dst yang jumlahannya menghasilkan lebar total sebesar Γ.

Jika energi eksitasi inti gabungan sesuai dengan salah satu tingkat energi, probabilitas terjadinya interaksi menjadi besar. Dengan kata lain, terjadi resonansi. Karena energi eksitasi tergantung kepada energi kinetik neutron, probabilitas terjadinya interaksi dan tampang lintang mikroskopis bervariasi terhadap energi neutron. Breit dan Wigner, berdasarkan pertimbangan mekanika kuantum, telah menurunkan pernyataan untuk tampang lintang mikroskopis σ_{na} untuk interaksi di mana neutron diserap dalam inti dan partikel (dimungkinkan neutron yang sama) dipancarkan:

$$\sigma_{na}(E) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{\Gamma_n \Gamma_a}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{1.14}$$

dengan $\lambda = h/mv$ adalah panjang gelombang de Broglie dari neutron dan E_r adalah energi resonansi. Tampang lintang mikroskopis menunjukkan nilai maksimum jika energi kinetik neutron E sama dengan E_r. Jika $E = E_r \pm \Gamma/2$, nilai tampang lintang mikroskopis turun menjadi setengahnya. Dengan demikian Γ menunjukkan lebar puncak resonansi pada setengah tinggi. Karena lebar tingkat energi biasanya kecil, puncak resonansi dapat sangat tajam. Gambar 1.10 menunjukkan salah satu contoh.

Ketika energi neutron meningkat, tinggi puncak resonansi berkurang dan letak resonansi satu sama lain menjadi sangat berdekatan sehingga mereka tidak dapat dibedakan lagi (lihat Gambar 1.11).

Gambar 1.10. *Tampang lintang mikroskopis pada sebuah resonans.*

Gambar 1.11. *Tampang lintang mikroskopis inti* ${}_{92}U^{238}$ *untuk tangkapan neutron.*

Titik awal untuk penurunan persamaan Breit-Wigner adalah inti atom yang diam yang ditumbuk oleh neutron. Pada kenyataannya inti atom juga akan mempunyai energi kinetik sebagai akibat kandungan panasnya. Ini juga akan tercermin pada tampang lintang mikroskopik, karena harus dilakukan pererataan terhadap rentang distribusi energi inti atom. Meskipun energi rerata inti atom adalah kecil, misal di suhu ruang sebesar 0,025 eV, pererataan ini mempunyai konsekuensi yang tidak dapat diabaikan untuk resonansi dan menyebabkan pelebaran resonansi dan penurunan nilai puncaknya. Kondisi semacam ini disebut dengan **efek Doppler** yang gayut terhadap suhu serta mempunyai peran yang penting di reaktor nuklir.

Tampang lintang mikroskopik di luar daerah resonansi ditentukan dari perilaku lebar $\Gamma_n, \Gamma_\gamma, \ldots$ sebagai fungsi dari energi neutron. Lebar Γ_γ dan Γ_f biasanya konstan, akan tetapi Γ_n meningkat sebanding dengan $\sqrt{E}$. Dari sini dapat diturunkan bahwa untuk energi yang jauh lebih rendah dari energi resonansi yang terendah, tampang lintang tangkapan dan fisi berperilaku sebagai berikut:

$$\sigma_\gamma, \sigma_f(E) \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \sim \frac{1}{v} \tag{1.15}$$

Untuk hamburan, tampang lintang mikroskopik berkurang sangat tajam di luar resonansi, dan akan didominasi oleh **hamburan potensial** di mana neutron akan dihamburkan oleh medan potensial inti atom dan tidak membentuk inti atom gabungan. Tampang lintang potensial bersifat konstan untuk rentang energi yang lebar, akan tetapi berkurang di energi tinggi. Untuk inti atom yang ringan, pada energi rendah pengaruh dari ikatan kimia dapat terjadi sehingga tampang lintang mikroskopisnya menjadi lebih besar dibandingkan dengan inti atom bebas (misal H di H_2O).

Di samping hamburan elastik di mana energi kinetik total partikel bersifat kekal, dapat terjadi pula hamburan inelastik. Pada hamburan semacam ini, inti atom tetap berada pada keadaan tereksitasi setelah melepaskan neutron dan dengan cepat akan meluruh ke keadaan dasar (*ground state*) dengan memancarkan foton. Neutron yang menumbuk atom harus mempunyai energi yang cukup tinggi untuk mengeksitasi inti atom sehingga hamburan inelastik adalah reaksi dengan ambang batas energi.

Data numeris untuk tampang lintang mikroskopik banyak nuklida telah tersedia sebagai file data komputer, misalnya ENDF/B (*Evaluated Nuclear Data File*), JEF (*Joint Evaluated File*), JENDL (*Japan Evaluated Nuclear Data Library*) dan BROND (*Russian Nuclear Data Library*). Tampang lintang mikroskopik tersebut serta berbagai reaksi yang lain dapat ditampilkan secara grafis oleh program komputer, misal `JANIS` (`https://www.oecd-nea.org/janis/`), atau secara online, misal di situs KAERI Nuclear Data Center (`http://atom.kaeri.re.kr/nuchart/`), JAEA Nuclear Data Center (`http://wwwndc.jaea.go.jp/NuC/`) atau IAEA (`https://www-nds.iaea.org/exfor/endf.htm`).

Contoh Soal

1. Tampang lintang tangkapan neutron termal untuk hidrogen adalah 0,33 b dan untuk oksigen adalah 2×10^{-4} b. Hitung tampang lintang tangkapan makroskopik untuk air.

   Jawab:

   Massa molekul air (M) adalah 18 dan densitas (ρ) air adalah 1000 kg/m^3. Molekul air terdiri dari 2 atom hidrogen dan 1 atom oksigen. Diketahui bilangan Avogadro (N_A) sebesar $6,02 \times 10^{23}$ dan 1 b = 10^{-28} m^2.

$$\begin{aligned}\Sigma_{H_2O} &= \frac{(10^3)(10^3)N_A}{18}(2\sigma_H + \sigma_O) \\ &= \frac{6,02 \times 10^{29}}{18}[(2)(0,33) + 2 \times 10^{-4}][10^{-28}] \\ &= 2,2 \text{ m}^{-1}\end{aligned}$$

2. Paparan kumulatif bahan bakar nuklir di sebuah reaktor (atau biasa disebut dengan *burnup*) dinyatakan dalam satuan megawatt-day per metrik ton (MWD/ton). 1 MWD/ton setara dengan energi sebesar 86,4 MJ/kg. Anggap bahan bakar menggunakan uranium dioksida dengan densitas 10.400 kg/m^3, dan mempunyai *burnup* sebesar 30.000 MWd/t, berapakah banyaknya fisi per meter kubik bahan bakar dan berapa person uranium yang sudah mengalami reaksi fisi ?

   Jawab:

   Salah satu pendekatan yang bagus adalah dengan mengasumsikan bahwa fisi sebanyak 3,1$\times 10^{10}$ akan menghasilkan energi sebesar 1 J atau 3,1 $\times 10^{16}$ fisi/MJ. Dengan demikian:

$$\begin{aligned}1 \text{ MWd/t} = 86,4 \text{ MJ/kg} &= (86,4)(3,1 \times 10^{15}) \\ &= 2,7 \times 10^{18} \text{ fisi/kg U}\end{aligned}$$

   Jika uranium pada oksida tersebut dianggap sebagian besar adalah U-238, maka 238 + 32 = 270 kg UO_2 mengandung 238 kg uranium. Karena densitas UO_2 adalah 10.400 kg/m^3, maka massa uranium adalah $(10.400)(238)/(270) = 9,2 \times 10^3$ kg U/m^3. Dengan demikian banyaknya fisi yang terjadi per meter kubik bahan bakar adalah

$$\begin{aligned}30.000 \text{ MWd/t} &= (3 \times 10^5)(2,7 \times 10^{18})(9,2 \times 10^3) \\ &= 7,4 \times 10^{26} \text{ fisi/m}^3\end{aligned}$$

Banyaknya nuklida uranium per meter kubik bahan bakar adalah

$$\frac{(6,02 \times 10^{23} \text{ inti/mol})(10.400 \text{ kg/m}^3)}{270 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}} = 2,3 \times 10^{28} \text{ inti/m}^3$$

Dengan demikian, persentase uranium yang sudah mengalami fisi adalah sebanyak $(7,4 \times 10^{26})/(2,3 \times 10^{28}) = 3,2\%$.

LATIHAN

1. Jika 1 amu setara dengan energi 931,5 MeV, energi ikat dapat dihitung menggunakan hubungan berikut ini:

$$\text{Energi ikat} = \Delta m \left(\frac{931,5 \text{ MeV}}{1 \text{ amu}} \right)$$

   Hitung defek massa dan energi ikat untuk ^{235}U jika diketahui massanya adalah 235,043924 amu.

2. Paduan logam terdiri dari 95% aluminum dan 5% silikon (% berat). Densitas dari paduan logam tersebut adalah 2,66 g/cm^3. Diketahui sifat-sifat aluminum dan silikon sebagai berikut:

Unsur	Berat atom	σ_a (b)	σ_s (b)
Aluminum	26,9815	0,23	1,49
Silikon	28,0855	0,16	2,20

   (a) Hitung densitas atom untuk aluminum dan silikon.

   (b) Tentukan tampang lintang serapan dan hamburan untuk neutron termal.

   (c) Hitung *mean free path* untuk serapan dan hamburan.

3. Sebuah reaktor beroperasi dengan fluks neutron sebesar 3×10^{13} n/cm^2 s dan terdiri dari 10^{20} atom ^{235}U per cm^3. Laju reaksinya adalah $1,29 \times 10^{12}$ fisi/cm^3. Hitunglah Σ_f dan σ_f.

Bab 2

Transport Neutron

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve
EUGENE WIGNER

Learning outcomes :

- Mampu menyusun persamaan transport
- Mampu menyusun model difusi satu grup

Minggu ke : 1

2.1. Persamaan Transport Neutron

STUDI mengenai distribusi neutron pada reaktor merupakan bagian yang sangat penting dari reaktor fisika dikarenakan neutron bebas memenuhi peran yang penting dengan jalan mempertahankan reaksi fisi pada reaktor nuklir. Pertanyaan umum yang timbul adalah sebagai berikut: bagaimana neutron bebas mendistribusikan dirinya terhadap ruang, energi, arah gerakan dan waktu? Perhatian kita tidak dicurahkan pada sejarah hidup individual dari neutron akan tetapi pada perilaku rerata secara statistik dari sebagian besar neutron. Ungkapan matematis dari distribusi neutron ini didasarkan kepada persamaan kesetimbangan neutron, yang disebut sebagai persamaan transport neutron. Persamaan ini merupakan bentuk linearisasi dari persamaan Boltzmann yang digunakan untuk menjelaskan perilaku kinetika gas. Linearisasi ini dimungkinkan karena interaksi antara neutron dengan neutron yang lain

dapat diabaikan pada reaktor nuklir, dengan kata lain distribusi neutron hanya ditentukan oleh interaksi antara neutron dan inti medium.

Distribusi neutron pada sistem dideskripsikan melalui rapat neutron diferensial $n(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$, di mana didefinisikan:
$n(\mathbf{r}, E, \Omega, t)dV dE d\Omega$ sebagai banyaknya neutron pada waktu t pada elemen volume dV dengan energi di antara E dan $E + dE$ yang bergerak pada elemen sudut ruang $d\Omega$ di sekitar arah Ω.
Jadi besaran ini merupakan fungsi dari 7 variabel bebas: tiga untuk ruang, satu untuk energi, dua untuk arah dan satu untuk waktu.

Sebagai ganti rapat neutron, pada reaktor fisika digunakan pula rapat flux gayut sudut ϕ:

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t) = n(\mathbf{r}, E, \Omega, t)v \tag{2.1}$$

di mana v merupakan kecepatan neutron. Besaran ini menyatakan sejumlah neutron bergerak pada arah Ω, yang melewati luas satuan tegak lurus dengan Ω per satuan waktu. Karena v adalah jarak yang ditempuh per satuan waktu, maka kita dapat menginterpretasikan $\phi = nv$ sebagai jarak total yang ditempuh per satuan volume dan per satuan waktu.

Jika Σ merupakan kemungkinan interaksi per satuan panjang, maka banyaknya interaksi R per satuan volum dan per satuan waktu dinyatakan oleh

$$R = \Sigma\phi \tag{2.2}$$

Pada reaktor fisika, orang sering bekerja dengan besaran diferensial, di mana untuk kemudahan notasi lambang diferensial tidak digunakan akan tetapi dengan menghilangkan variabel yang sudah diintegralkan maka seberapa jauh kuantitas tersebut bersifat diferensial masih dapat diindikasikan, misalnya

$$\phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = \int_0^\infty \phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dE \tag{2.3}$$

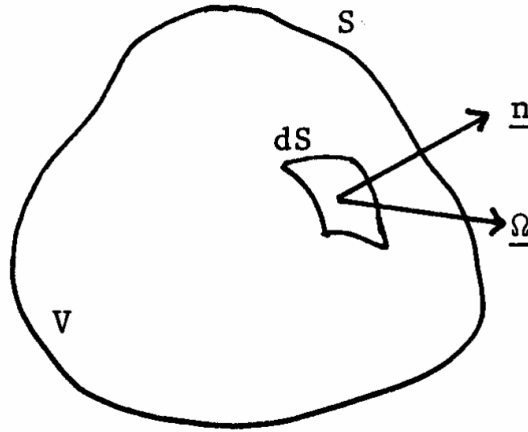
$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \phi(\mathbf{r}, \Omega, E, T)d\Omega \tag{2.4}$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} \phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dE d\Omega = \int_0^\infty \phi(\mathbf{r}, E, t)dE = \int_{4\pi} \phi(\mathbf{r}, \Omega, t)d\Omega \tag{2.5}$$

Besaran terakhir $\phi(\mathbf{r}, t)$ adalah rapat flux neutron total, atau biasa disebut pula sebagai flux yang menyatakan banyaknya neutron yang bergerak per detik melewati bola imajiner dengan luas sebesar 1 cm^2.

Untuk mendapatkan persamaan yang mendeskripsikan transport neutron kita menentukan volume V sembarang yang dilingkupi oleh luasan S, di mana akan diterapkan neraca kesetimbangan. Kita akan mulai dari banyaknya neutron pada V dengan energi antara E dan $E + dE$ dengan arah pada sudut ruang $d\Omega$ di sekitar Ω. Banyaknya ini sama dengan
$\int_V n(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dV dE d\Omega$

Perubahan banyaknya neutron ini terhadap waktu merupakan neraca semua proses di mana neutron akan bertambah atau berkurang, yaitu:

1. bertambah karena adanya sumber neutron, yang menghasilkan fisi,

Gambar 2.1. *Bocoran dari volume V*

2. bertambah karena adanya hamburan neutron dengan energi dan arah yang lain ke wilayah energi dE dan sudut ruang dΩ,
3. berkurang karena aliran keluar netto neutron
4. berkurang karena neutron mengalami interaksi.

Untuk sumbangan dari butir 1 kita mendefinisikan kuat sumber $S(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ sehingga penambahan neutron menjadi

$$\int_V S(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV dE d\Omega$$

Untuk sumbangan dari butir 2 kita munculkan tampang lintang hamburan diferensial $\Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E)$, sehingga

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) dE d\Omega$$

merupakan probabilitas per satuan panjang untuk neutron mengalami hamburan dari energi E' dan arah Ω' menjadi energi di antara $E + dE$ dan arah pada sudut ruang dΩ di sekitar Ω. Kenaikan banyaknya neutron oleh karenanya dinyatakan oleh:

$$\int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) dE' d\Omega' dV dE d\Omega$$

Dengan menghitung penurunan (atau kenaikan untuk hasil yang negatif) oleh aliran keluar netto neutron, kemungkinan bahwa arah Ω tidak harus sama dengan arah vektor normal **n** di permukaan (lihat Gambar 2.1).

Aliran keluar netto sekarang dinyatakan dengan

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \Omega \phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dE d\Omega dS = \int_V \nabla \cdot \Omega \phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV dE d\Omega$$

di mana digunakan teorema divergensi Gauss untuk mengkonversi integral permukaan menjadi integral volume.

Berkurangnya neutron (butir 4) melalui semua interaksi yang mungkin terjadi sesuai dengan (2.2) diberikan oleh:

$$\int_V \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dVdEd\Omega$$

Hasil netto dari semua suku ini, di mana dua yang pertama bernilai positif dan dua yang terakhir bernilai negatif adalah:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_V n(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dVdEd\Omega &= \int_V S(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dVdEd\Omega \\ &+ \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \to \Omega, E' \to E)\phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t)dE'd\Omega'dVdEd\Omega \\ &- \int_V \nabla \cdot \Omega\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dVdEd\Omega - \int_V \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)dVdEd\Omega \end{aligned} \tag{2.6}$$

Persamaan ini dapat dituliskan juga sebagai

$$\begin{aligned}\int_V \Bigg[\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)}{\partial t} &- S(\mathbf{r}, \Omega, E, t) + \Omega \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) \\ &- \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \to \Omega, E' \to E)\phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t)dE'd\Omega'\Bigg] dV = 0\end{aligned} \tag{2.7}$$

Agar persamaan di atas berlaku untuk setiap volume V maka integran dari integral volume ini harus bernilai nol. Dengan demikian persamaan transport yang dihasilkan menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)}{\partial t} &= S(\mathbf{r}, \Omega, E, t) + \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \to \Omega, E' \to E)\phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t)dE'd\Omega' \\ &- \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) - \Omega \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) di atas merupakan persamaan integro-diferensial untuk flux neutron gayut sudut $\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$. Sayangnya, persamaan tersebut susah untuk diselesaikan secara analitik bahkan untuk kasus yang sederhana sekalipun.

Untuk persamaan tersebut berlaku syarat batas dan syarat awal. Terlebih dahulu ditentukan sebuah sistem konveks yang ditempatkan pada ruang hampa (*vakum*) sehingga tidak ada neutron yang berada di luar sistem dapat masuk ke dalam. Dengan demikian syarat batas menjadi:

$$\phi(\mathbf{r_s}, \Omega, E, t) = 0 \text{ untuk } \mathbf{n} \cdot \Omega < 0 \tag{2.9}$$

untuk semua titik r_s pada permukaan sistem.

Sebagai nilai awal harus ditentukan fluks neutron $\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t_0)$ pada suatu waktu tertentu t_0 untuk semua nilai **r** pada sistem dan semua nilai E dan Ω.

Apabila terjadi proses pembelahan pada sistem maka sumber adalah fisi dengan distribusi energi neutron fisi $\chi(E)$ serta jika berlaku isotropi:

$$S_f(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E')\phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) dE' d\Omega' \tag{2.10}$$

Dengan melakukan integrasi pada persamaan (2.8) terhadap arah Ω, dapat didapatkan persamaan untuk fluks skalar $\phi(\mathbf{r}, E, t)$. Suku aliran $\Omega \cdot \nabla\phi$ sudah barang tentu tidak muncul dalam $\phi(\mathbf{r}, E, t)$. Oleh karenanya diperkenalkan satuan vektor $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ di mana

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Omega\phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\Omega \tag{2.11}$$

Besaran ini dinamakan dengan rapat aliran neutron netto, di mana $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}dS$ menyatakan banyaknya neutron netto yang melintasi luasan sebesar dS per satuan waktu. Pengertian "netto" di sini adalah perbedaan antara banyaknya neutron yang melewati dS ke arah vektor normal dengan banyaknya neutron yang mengalir ke arah sebaliknya.

Dengan demikian integrasi pada persamaan (2.8) terhadap arah Ω menghasilkan

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathbf{r}, E, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) = S(\mathbf{r}, E, t) + \int_0^\infty \Sigma_s((r, E' \to E)\phi(\mathbf{r}, E', t) dE' \tag{2.12}$$

Persamaan kesetimbangan di atas seringkali disebut dengan *persamaan kontinyuitas*.

2.2. Persamaan Difusi

Untuk mempermudah perhitungan kita gunakan pendekatan neutron mono-energetik, artinya dianggap neutron memiliki satu tingkat energi saja. Dengan demikian persamaan (2.8) menjadi tidak gayut terhadap energi dan menjadi

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, \Omega, t) + \Omega \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}, \Omega, t) + \Sigma_t(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = S(\mathbf{r}, \Omega, t) + \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \to \Omega)\phi(\mathbf{r}, \Omega', t) d\Omega' \tag{2.13}$$

Dengan melakukan integral terhadap Ω dapat didapatkan bentuk mono-energetik dari persamaan kontinyuitas sebagai berikut:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \tag{2.14}$$

di mana $\Sigma_a = \Sigma_t - \Sigma_s$

Selanjutnya kita gunakan pendekatan dengan menggunakan flux gayut sudut $\phi(\mathbf{r}, \Omega, t)$ kepada arah Ω menurut deret (bandingkan dengan ekspansi deret pada polinomial Legendre) dan dengan memotong

ekspansi deret setelah suku kedua, didapatkan

$$\phi(\mathbf{r},\Omega,t) = \frac{1}{4\pi}\left[\phi(\mathbf{r},t) + 3\Omega\cdot J(\mathbf{r},t)\right] \tag{2.15}$$

Dengan melakukan integrasi terhadap Ω untuk suku sebelah kiri dari persamaan di atas akan didapatkan $\phi(\mathbf{r},t)$ dan dengan mengalikannya dengan Ω kemudian mengintegralkannya terhadap Ω akan didapatkan $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$.

Dengan mengalikan persamaan (2.13) dengan Ω dan kemudian melakukan integral terhadap Ω kita dapatkan:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v}\frac{\partial\mathbf{J}(\mathbf{r},t)}{\partial t} =& -\int\Omega[\Omega\cdot\nabla\phi(\mathbf{r},\Omega,t)]d\Omega - \Sigma_t(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\\ &+\int\Omega S(\mathbf{r},\Omega,t)d\Omega + \int\int\Omega\Sigma_s(\mathbf{r},\Omega'\to\Omega)\phi(\mathbf{r},\Omega',t)d\Omega'd\Omega\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dengan menerapkan ekspansi deret (Pers. 2.15) kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned}-\int\Omega\left[\Omega\cdot\nabla\phi(\mathbf{r},\Omega,t)\right]d\Omega &= -\frac{1}{4\pi}\int\Omega\left[\Omega\cdot\nabla\phi(\mathbf{r},,t)\right]d\Omega - \frac{3}{4\pi}\int\Omega\left[\Omega\cdot\nabla(\Omega\cdot\mathbf{J})\right]d\Omega\\ &= -\frac{1}{3}\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \frac{3}{4\pi}\int\Omega(\Omega\cdot\Omega\nabla\cdot\mathbf{J})d\Omega\\ &= -\frac{1}{3}\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \frac{3}{4\pi}\nabla\cdot\mathbf{J}\int\Omega d\Omega = -\frac{1}{3}\nabla\phi(\mathbf{r},t)\end{aligned} \tag{2.17}$$

untuk suku pertama pada bagian kanan dari Pers. (2.16).

Jika sumber S bersifat isotropik, integral terhadap kuat sumber tidak memberikan kontribusi.

Suku yang ditentukan dari hamburan neutron, setelah melalui derivasi yang panjang, dapat dituliskan sebagai

$$\int\int\Omega\Sigma_s(\mathbf{r},\Omega'\to\Omega)\phi(\mathbf{r},\Omega',t)d\Omega'd\Omega = \bar{\mu_0}\Sigma_s(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r},t) \tag{2.18}$$

dengan $\bar{\mu_0}$ adalah nilai rata-rata dari kosinus sudut hamburan ($\mu_0 = \Omega\cdot\Omega$). Nilai ini akan diturunkan di Bagian 4.1.

Pers. (2.16) sekarang menjadi

$$\begin{aligned}\frac{1}{v}\frac{\partial\mathbf{J}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= -\frac{1}{3}\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_t(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \bar{\mu_0}\Sigma_s(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\\ &= -\frac{1}{3}\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_{tr}(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\end{aligned} \tag{2.19}$$

dengan tampang lintang transpor makrospik, Σ_{tr}, sebagai berikut

$$\Sigma_{tr}(\mathbf{r}) = \Sigma_t(\mathbf{r}) - \bar{\mu_0}\Sigma_s(\mathbf{r}) = \Sigma_a(\mathbf{r}) - (1-\bar{\mu_0})\Sigma_s(\mathbf{r}) \tag{2.20}$$

Untuk kasus yang gayut waktu, pada kenyataannya perubahan aliran nautron **J**, tampaknya dapat diabaikan terhadap suku-suku lain di Pers. (2.19), sehingga dalam kondisi

$$\frac{1}{|\mathbf{J}|}\frac{\partial J}{\partial t} \ll \nu\Sigma_t$$

akan didapatkan dari Pers. (2.19)

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r})}\nabla\phi(\mathbf{r},t) = -D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r},t) \tag{2.21}$$

yang mana kita dapatkan hubungan antara arus neutron **J** dengan fluks neutron skalar ϕ.

Di samping itu kita juga mendapatkan bahwa *koefisien difusi* didefinisikan sebagai

$$D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r})} \tag{2.22}$$

Parameter Σ_{tr} adalah tampang lintang transport yang bisa didekati dengan

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_t - \bar{\mu}_0\Sigma_s \tag{2.23}$$

Untuk medium yang tidak menyerap, maka tampang lintang transport dituliskan sebagai

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0) \tag{2.24}$$

Besaran $\bar{\mu}_0$ adalah nilai rata-rata dari kosinus sudut hamburan. Besaran ini dibahas lebih lanjut di Bagian 4.1.

Dengan mensubstitusi Pers. (2.21) ke Pers. (2.14) akan dihasilkan ***persamaan difusi*** sebagai berikut

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \nabla\cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) + S(\mathbf{r},t) \tag{2.25}$$

Pendekatan yang digunakan untuk memperoleh Pers. (2.25) adalah ekspansi yang terbatas dari deret fluks gayut sudut. Oleh karena itu, persamaan difusi tidak valid di tempat-tempat di mana sifat-sifat medianya sangat bervariasi atau di medium yang sangat menyerap neutron. Tampak pula bahwa fluks neutron tidak boleh bervariasi secara signifikan pada jarak yang berukuran kira-kira sebanding dengan *mean free path* ($\lambda_t = 1/\Sigma_t$) neutron di medium tersebut. Hal tersebut menunjukkan bahwa teori difusi dapat menunjukkan deviasi dari solusi persamaan transport yang lebih akurat di daerah di sekitar sumber neutron eksternal dan di antar batas permukaan.

Sebagai contoh penerapan teori difusi, kita lihat kasus stasioner (tidak gayut waktu) untuk sumber titik yang memancarkan neutron sebanyak Q neutron/s di medium homogen tak hingga besar. Sebagai hasil dari simetri bola pada sistem, persamaan difusi dapat dituliskan sebagai

$$D\left\{\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr}\right\} - \Sigma_a\phi = 0, \qquad r > 0 \tag{2.26}$$

atau

$$\frac{d^2}{dr^2}[r\phi] - \frac{1}{L^2}[r\phi] = 0 \qquad (2.27)$$

dengan

$$L = \sqrt{D/\Sigma_a} \qquad (2.28)$$

adalah panjang difusi neutron.

Solusi umum untuk persamaan di atas adalah

$$\phi(r) = A\frac{e^{-r/L}}{r} + B\frac{e^{r/L}}{r} \qquad (2.29)$$

Karena neutron tidak bisa tak hingga besar untuk $r \to \infty$, maka $B = 0$. Konstanta A dapat diperoleh dari syarat batas bahwa arus neutron dari bola yang sangat kecil di sekitar sumber harus sama besarnya dengan kuat sumber

$$\lim_{r\to 0} 4\pi r^2 J(r) = Q \qquad (2.30)$$

Dengan demikian, solusi dari persamaan difusi di atas menjadi

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi D}\frac{e^{-r/L}}{r} \qquad (2.31)$$

Arti fisi dari panjang difusi dapat dilihat dari perhitungan jarak rerata yang ditempuh oleh neutron, dihitung sebagai garis lusur, sampai neutron diserap:

$$\bar{r} = \frac{1}{Q}\int_0^\infty r\Sigma_a\phi(\mathbf{r})4\pi^2 dr = 2L \qquad (2.32)$$

Beberapa nilai L Untuk neutron termal dengan energi 0,025 eV dapat dilihat di Tabel 2.1.

Tabel 2.1. *Sifat transport untuk neutron termal 0,025 eV di beberapa material.*

Material	Σ_a (cm^{-1})	λ_a (cm)	D (cm)	L (cm)
H_2O	0,022	45,5	0,142	2,54
D_2O	3,3 $\cdot 10^{-5}$	30300	0,840	160
Be	1,24 $\cdot 10^{-3}$	806	0,416	18,3
C	3,2 $\cdot 10^{-4}$	3120	0,916	53,5

Jarak kuadrat rerata sampai diserap adalah

$$\overline{r^2} = \frac{1}{Q}\int_0^\infty r^2\Sigma_a\phi(\mathbf{r})4\pi r^2 dr = 6L^2 \qquad (2.33)$$

Oleh karena itu panjang difusi adalah ukuran jarak rata-rata antara tempat di mana neutron dihasilkan dan di mana neutron diserap. Jarak ini jangan disamakan dengan jarak rata-rata yang ditempuh oleh neutron, di mana jarak ini sama dengan *mean free path* untuk serapan, yaitu $\lambda_a = 1/\Sigma_a$ dan nilainya jauh lebih besar daripada jarak yang diukur secara garis lurus, akibat gerakan neutron yang 'zigzag'.

2.3. Syarat Batas

Syarat batas $\phi(\mathbf{r_s}, \Omega) = 0$ untuk $\mathbf{n} \cdot \Omega < 0$ tidak dapat diterapkan pada teori difusi. Pendekatan yang dapat diterima untuk teori difusi adalah dengan mensyaratkan arus neutron yang arahnya masuk di permukaan adalah nol.

Untuk geometri papan satu dimensi, ada simetri di sekitar sumbu x. Vektor arus neutron **J** dengan demikian akan diarahkan sepanjang sumbu ini.

Arus neutron pada arah sumbu x positif, J_+ adalah

$$\begin{aligned} J_+(x) &= \int_{\mathbf{n}\cdot\Omega>0} \mathbf{n}\cdot\Omega\phi(x,\Omega)d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{n}\cdot\Omega>0} \mathbf{n}\cdot\Omega\phi(x)d\Omega + \frac{3}{4\pi}\int_{\mathbf{n}\cdot\Omega>0} \mathbf{n}\cdot\Omega(\Omega\cdot\mathbf{J})d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi}\phi(x)\int_0^1\int_0^{2\pi} \mu\, d\mu\, d\psi + \frac{3}{4\pi}J(x)\int_0^1\int_0^{2\pi} \mu^2\, d\mu\, d\psi \\ &= \frac{1}{4}\phi(x) + \frac{1}{2}J(x) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Arus neutron ke arah sumbu x negatif adalah

$$J_-(x) = \int_{\mathbf{n}\cdot\Omega<0} |\mathbf{n}\cdot\Omega|\phi(x,\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{4}\phi(x) - \frac{1}{2}J(x) \tag{2.35}$$

Jika kita tetapkan besaran ini sama dengan 0 pada bidang batas x_s dengan vakum, maka dengan $J(x) = -D\dfrac{d\phi}{dx}$ akan kita dapatkan

$$d = \frac{\phi(x)}{-\dfrac{d\phi}{dx}} = 2D = \frac{2}{3\Sigma_{tr}} = \frac{2}{3}\lambda_{tr} \tag{2.36}$$

dengan d kita sebut sebagai *jarak terekstrapolasi* dengan λ_{tr} adalah *transport mean free path* (Lihat Gambar 2.2).

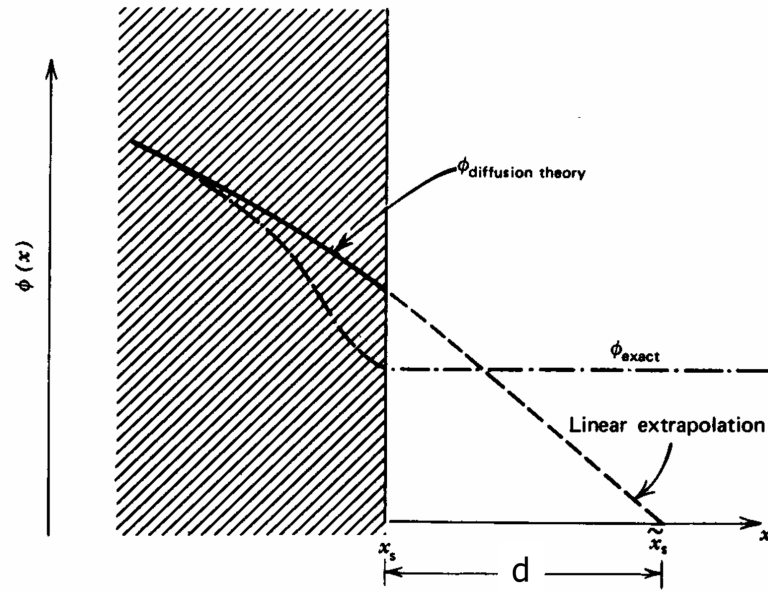
Untuk medium yang homogen dan mempunyai serapan neutron yang lemah, solusi eksak untuk persamaan transport mono-energetik menghasilkan

$$d = 0,7104\lambda_{tr} \tag{2.37}$$

yang nilainya cukup bagus untuk teori difusi.

Oleh karena itu untuk keperluan praktis, syarat batas di tepi batas dituliskan sebagai

$$\phi(x_s + 0,71\lambda_{tr}) = 0 \tag{2.38}$$

Di batas antar dua medium yang berbeda, atas dasar fisis maka fluks neutron dan densitas arus netto harus kontinyu. Dengan kata lain, tidak boleh ada ‘lompatan’ nilai ϕ dan J. Karena J harus kontinyu, gradien fluks akan mengalami lompatan jika koefisien difusi di kedua medium berbeda.

Gambar 2.2. *Penentuan jarak terekstrapolasi.*

Dari Persamaan (2.34) dan (2.35) kita bisa peroleh

$$\text{densitas arus netto} = J_+(x) - J_-(x) = J(x) \tag{2.39}$$

$$\text{densitas arus total} = J_+(x) + J_-(x) = \frac{1}{2}\phi(x) \tag{2.40}$$

Besaran yang terakhir ini menunjukkan banyaknya neutron yang mengalir melalui permukaan per satuan waktu tanpa mempertimbangkan sisi mana neutron datang. Fluks skalar seringkali dibingungkan dengan densitas arus total, tetapi Pers. (2.40) menunjukkan bahwa kedua kuantitas tersebut berbeda dengan faktor dua kali untuk kasus fluks isotropik atau linear anisotropik.

CONTOH SOAL

1. Tampang lintang karbon pada energi 1 eV adalah sebesar 4,8 b. Perkirakan berapa besarnya koefisien difusi grafit pada energi ini.

   Jawab:

   Koefisien difusi dapat dihitung dari Pers. 2.22 dan nilai rata-rata dari kosinus sudut hamburan bisa didekati dengan

   $$\bar{\mu}_0 = \frac{2}{3A} \tag{2.41}$$

   Untuk $A = 12$, maka $\bar{\mu}_0 = \frac{2}{36} = 0,555$. Dari Tabel di Lampiran D.2 didapatkan densitas atom untuk grafit sebesar $0,08023 \times 10^{24}$. Dengan demikian koefisien difusi grafit adalah sebesar

   $$\begin{aligned} D = \frac{1}{3\Sigma_s(1-\bar{\mu}_0)} &= \frac{1}{3 \times 0,08023 \times 4,7(1-0,055)} \\ &= 0,916 \text{ cm} \end{aligned}$$

LATIHAN

1. Dua pancaran neutron termal diinjeksikan dari arah yang berlawanan menuju ke sample ^{235}U yang tipis. Pada titik tertentu di sampel tersebut, intensitas pancarannya sebesar 10^{12} n/cm^2.s dari sebelah kiri dan 2×10^{12} n/cm^2.s dari sebelah kanan. Hitung:

   (a) Fluks neutron dan densitas arus neutron di titik tersebut.

   (b) Densitas laju reaksi fisi di titik tersebut.

2. Sebuah reaktor termal berbentuk bola dengan jari-jari R. Didapatkan fluks neutron angular pada reaktor tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E) = \frac{\phi_0}{4\pi} E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{\sin(\pi r/R)}{r}$$

   Hitunglah banyaknya neutron total di dalam reaktor.

3. Hitunglah koefisien difusi neutron termal untuk air, grafit, uranium alam dan uranium diperkaya 95%. Kemudian hitunglah panjang terekstrapolasi untuk material-material tersebut. Apa yang dapat Anda ceritakan dari hasil-hasil perhitungan yang diperoleh?

4. Fluks neutron pada jarak r yang berasal dari sumber titik yang memancarkan S neutron per detik pada medium moderator tak hingga besar dapat dinyatakan dengan rumusan sebagai berikut

$$\phi(r) = \frac{Se^{-r/L}}{4\pi Dr}$$

   dengan L yang konstan.

   Susunlah persamaan yang menyatakan:

   (a) arus neutron di medium,

   (b) banyaknya neutron netto yang mengalir melalui bola dengan jari-jari r di sekitar sumber.

Bab 3

Analisis Reaktor menggunakan Teori Difusi

No man should escape our universities without knowing how little he knows.

J. ROBERT OPPENHEIMER

Learning outcomes :

- Mampu menyusun model difusi satu grup untuk reaktor satu daerah dan banyak daerah.
- Mampu menyelesaikan permasalahan dalam kerangka teori difusi satu grup untuk reaktor satu daerah dan banyak daerah.

Minggu ke : 1 dan 2

DI bab ini kita akan mempelajari bagaimana distribusi neutron di reaktor nuklir dan apa yang dapat kita simpulkan tentang mempertahankan reaksi berantai di reaktor. Kita akan membatasi pada neutron mono-energetik atau pendekatan satu kelompok, di mana semua neutron dianggap berada pada satu kelompok energi saja.

3.1. Teori difusi satu kelompok

Persamaan difusi satu kelompok (Persamaan 2.25) dengan sumber neutron sebagai hasil dari reaksi fisi

$$S(\mathbf{r},t) = \nu\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) \tag{3.1}$$

akan menghasilkan

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r},t) + \nu\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a(\mathbf{r},t) = \frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{3.2}$$

dengan syarat batas dan syarat awal yang sesuai.

Perilaku gayut waktu populasi neutron di sistem yang *multiplying* (yaitu sistem di mana berlangsung reaksi fisi) akan bergantung pada rasio antara suku produksi dengan suku-suku serapan dan bocoran di sisi sebelah kiri dari Pers. (3.2). Jika suku produksi dominan, maka populasi neutron akan bertambah. Jika suku serapan dan bocoran yang dominan, maka sebaliknya populasi neutron akan berkurang. Ketika produksi dan hilangnya neutron tepat seimbang, fluks neutron akan konstan sepanjang waktu. Untuk kasus yang semacam ini kita menyebutnya sebagai *reaktor kritis*. Dengan demikian suku turunan waktu di Pers. (3.2) sama dengan nol.

Untuk reaktor yang tidak kritis, kita seringkali juga ingin mengetahui seberapa jauh produksi, serapan dan bocoran neutron menyimpang dari kondisi setimbang, tanpa harus menyelesaikan persamaan difusi gayut waktu, karena perilaku gayut waktu yang eksak adalah hasil, bukan penyebab, untuk kesetimbangan ini. Kita dapat memperoleh persamaan kondisi ajeg (*steady state*) dengan menyesuaikan secara artifisial suku sumber di Pers. (3.2). Secara fisis ini berarti bahwa kita membuat sistem tampaknya kritis dengan melakukan perubahan (secara fiktif) produksi neutron per fisi. Secara matematis ini akah menghasilkan persamaan nilai diri (*eigenvalue*) dengan nilai *eigenvalue* sebesar k.

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r},t) + \frac{\nu}{k}\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a(\mathbf{r},t) = 0 \tag{3.3}$$

Eigenvalue diletakkan di bagian penyebut dari suku produksi, karena dengan demikian akan diperoleh arti fisis yang penting sebagai berikut. Pengintegralan terhadap volume reaktor akan memberikan

$$k = \frac{\displaystyle\int_V \nu\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV}{\displaystyle -\int_V \nabla\cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r})\,dV + \int_V \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV} \tag{3.4}$$

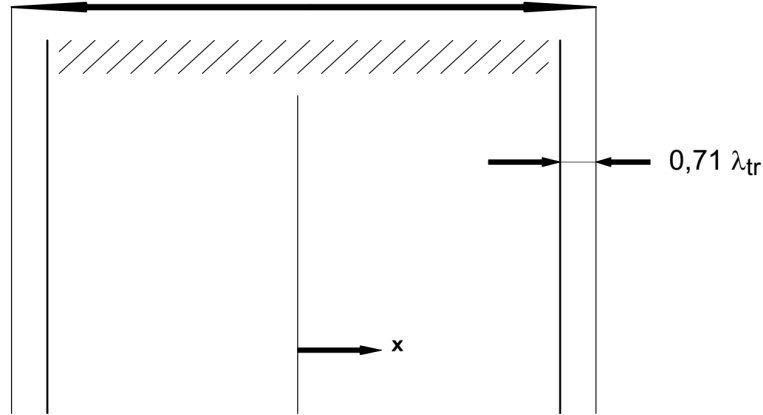
Dengan bantuan teorema divergensi Gauss, integral yang pertama di bagian penyebut akan berubah menjadi

$$-\int_V \nabla\cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r})\,dV = -\int_S D(\mathbf{r})\mathbf{n}\cdot\nabla\phi(\mathbf{r})\,dS = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r})\,dS \tag{3.5}$$

di mana S adalah permukaan luar reaktor dan **n** adalah vektor normal satuan lokal terhadap permukaan. Integral tersebut dengan demikian sama dengan bocoran neutron total dari reaktor. Pers. (3.4) sekarang mempunyai arti fisis sederhana, yang dalam kata-kata dapat diungkapkan sebagai

$$k = \frac{\text{laju produksi neutron total akibat fisi}}{\text{laju hilangnya neutron total akibat serapan dan bocoran}} \tag{3.6}$$

Faktor ini disebut dengan **faktor perlipatan efektif**, k_{eff}.

Kejadian fisis di reaktor dapat dianggap sebagai datang dan hilangnya generasi neutron secara bergantian, di mana proses fisi dianggap sebagai kejadian lahirnya neutron. Faktor perlipatan, k_{eff}, menyatakan

Gambar 3.1. *Reaktor papan tak hingga.*

rasio antara ukuran populasi neutron pada dua generasi yang berurutan, jika fluks neutron secara spasial terdistribusi sesuai dengan distribusi *eigenvalue*, yaitu solusi dari Pers. (3.3).

Agar mendapatkan persamaan yang dapat diselesaikan secara analitik, reaktor diasumsikan homogen, dalam arti tampang lintant makroskopik bersifat tidak gayut terhadap ruang. Kondisi ini dapat terjadi jika material pada reaktor dicampur secara merata (homogen) atau hanya terdapat satu jenis material di reaktor tersebut. Umumnya, reaktor mempunyai struktur yang heterogen, yaitu terdiri dari bagian-bagian yang berbeda komposisinya, misal bahan bakar, material struktur, moderator, pendingin, batang kendali, dan sebagainya. Jika dimensi dari bagian-bagian yang berbeda komposisi tersebut adalah kecil dibandingkan dengan *mean free path* neutron, reaktor dapat dianggap sebagai homogen.

Untuk sistem yang homogen, Pers. (3.3) dapat ditulis sebagai

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + B^2\phi(\mathbf{r}) = 0 \tag{3.7}$$

dengan

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f/k - \Sigma_a}{D} \tag{3.8}$$

Kita dapat melihat bahwa kuantitas ini, yang didefinisikan sebagai eigenvalue dari Pers. (3.7), sebagai jenis eigenvalue yang berbeda dengan faktor multiplikasi k, yang mana terdapat korelasi langsung yang dinyatakan dengan Pers. (3.8).

Untuk geometri yang sederhana, misalnya reaktor papan dengan lebar terekstrapolasi a dan panjang serta tinggi yang tak hingga (Gambar 3.1), persamaan difusi menjadi:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + B^2\phi(x) = 0 \tag{3.9}$$

Solusi yang memenuhi syarat simetri terhadap $x = 0$ adalah

$$\phi(x) = A\cos Bx \tag{3.10}$$

Agar memenuhi syarat batas ($\phi = -$ pada tepi terekstrapolasi $x = \pm a/2$), berlaku relasi

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \tag{3.11}$$

Kita dapat melihat bahwa *eigenvalue* B^2 tergantung kepada geometri (bentuk dan dimensi) reaktor. Sesuai dengan Pers. (3.7),

$$B^2 = -\frac{\nabla^2\phi(\mathbf{r})}{\phi(\mathbf{r})} \tag{3.12}$$

sehingga B^2 menyatakan kurvatur atau kelengkungan (*buckling*) dari fluks di dalam reaktor. Oleh karena itu, B^2 juga disebut sebagai *faktor buckling geometri* , B_g^2.

Tabel 3.1 menampilkan solusi dari Pers. (3.7) untuk sejumlah geometri. Distribusi fluks yang terkait ditunjukkan pada Gambar 3.2. Fungsi diri (*eigenfunction*) sudah dinormalisasi dengan nilai 1 di titik awal. Perhatikan bahwa koefisien A dari Pers. (3.10) tidak dapat ditentukan, karena solusi dari Pers. (3.7) atau (3.9) dapat dikalikan dengan faktor sembarang.

Tabel 3.1. *Faktor buckling untuk berbagai geometri. (dimensi terekstrapolasi)*

Geometri	B^2	$\phi(\mathbf{r})$	Volume (minimum) pada B^2
Papan tak hingga (tebal a)	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	-
Balok (sisi a, b, c)	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$	$\frac{161}{B^3}$
Bola (jari-jari R)	$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$\frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)$	$\frac{130}{B^3}$
Silinder (tinggi H, jari-jari R)	$\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R}\right)^2$	$J_0\left(2,405\frac{r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$	$\frac{148}{B^3}$

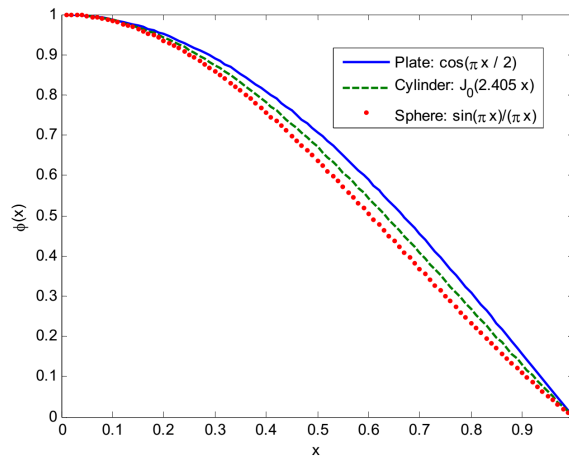
Dengan bantuan Pers. (3.7) untuk reaktor homogen, dari Pers. (3.4) dapat diturunkan

$$k_{eff} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB_g^2} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}\frac{1}{1 + DB_g^2/\Sigma_a} = \frac{k_\infty}{1 + B_g^2 L^2} \tag{3.13}$$

dengan

$$k_\infty = \nu\frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \tag{3.14}$$

adalah faktor multiplikasi reaktor yang tak hingga besar tanpa bocoran, dan

$$L = \sqrt{D/\Sigma_a} \tag{3.15}$$

Gambar 3.2. *Distribusi fluks neutron pada reaktor dengan geometri yang berbeda.*

adalah panjang difusi neutron.

Perbedaan antara k_∞ dengan k_{eff} terletak pada bocoran neutron dari reaktor, sehingga sesuai dengan Pers. (3.13)

$$k_{eff} = k_\infty P_{NL} \tag{3.16}$$

dengan

$$P_{NL} = \frac{1}{1 + B_g^2 L^2} \tag{3.17}$$

adalah kebolehjadian tidak-bocor (*non-leakage probability*) atau faktor retensi, yaitu kebolehjadian neutron yang dihasilkan selama reaksi fisi tidak bocor dari reaktor tetapi diserap di dalamnya.

Selain dari faktor *buckling* geometri, B_g^2, kita juga dapat mendefinisikan faktor *buckling* material, B_m^2, yang tergantung pada komposisi material di teras reaktor

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{k_\infty - 1}{L^2} \tag{3.18}$$

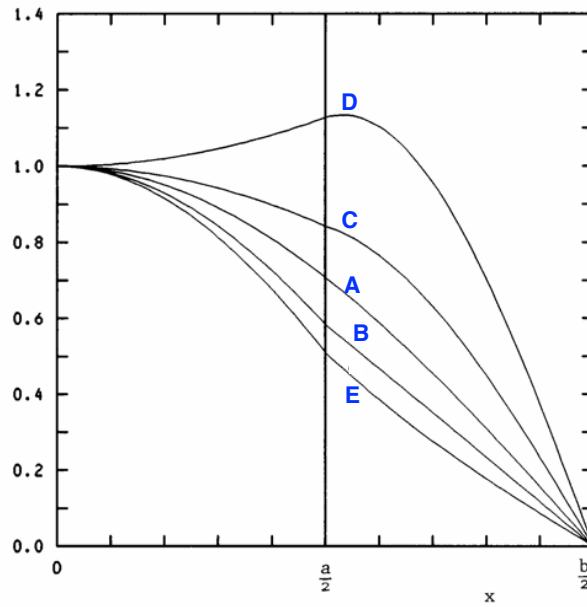
Dari Pers. (3.3), kita dapat melihat bahwa untuk reaktor yang kritis berlaku

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + B_m^2\phi(\mathbf{r}) = 0, \qquad k = 1 \tag{3.19}$$

Dengan demikian, untuk reaktor kritis berlaku

$$B_g^2 = B_m^2 \tag{3.20}$$

Terdapat lebih dari satu solusi daripada Pers. (3.11) untuk problem Pers. (3.9) yang memenuhi syarat batas, yaitu

$$B_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.21}$$

Gambar 3.3. *Fluks neutron sebagai fungsi dari x pada reaktor dua zona. Faktor buckling material dinyatakan pada Tabel 3.2.*

dengan *eigenfunction* yang sesuai

$$\phi_(x) = A_n \cos(n\pi \frac{x}{a}), \quad n = 1, 3, 5, \dots \tag{3.22}$$

Sejumlah *eigenvalue*, k_i, cocok dengan solusi-solusi tersebut. *Eigenfunction* ϕ_1 disebut sebagai moda dasar (*fundamental mode*) dan *eigenvalue* yang sesuai adalah $k_1 = k_{eff}$. Di samping itu, $B_g^2 = B_1^2$, sehingga kita dapat mendefinisikan faktor *buckling* geometri sebagai *eigenvalue* terkecil dari Pers. (3.9) dan k_{eff} sebagai *eigenvalue* terbesar dari Pers. (3.3). Karena *eigenfunction* moda yang lebih tinggi untuk nilai-nilai x tertentu adalah negatif, bentuk-bentuk fluks ini tidak memiliki arti jika berdiri sendiri. Meskipun demikian, karena *eigenfunction* bersifat mutually orthogonal, yaitu

$$\int \phi_n(x)\phi_m(x)\, dx = 0 \text{ untuk } m \neq n \tag{3.23}$$

fluks di dalam reaktor sebagai hasil distribusi sumber neutron sembarang dapat dituliskan sebagai deret *eigenfunction* tersebut. Di samping itu, pada fenomena transisi untuk proses yang gayut waktu, *eigenfunction* dan *eigenvalue* order tinggi memegang peranan (meskipun karena faktor-faktor multiplikasi yang sesuai bernilai kecil, mereka akan hilang dengan cepat).

3.2. Sistem multi zona

Sebuah reaktor bisa saja terdiri dari lebih dari satu zona dengan komposisi material yang berbeda. Konsekuensinya adalah bahwa faktor *buckling* material akan bervariasi di setiap zona.

Tabel 3.2. *Faktor buckling material untuk sistem dua zona.*

Situasi	B_{m1}^2	B_{m2}^2
A	$\frac{9,87}{b^2}$	$\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{9,87}{b^2}$
B	$\frac{14,4}{b^2}$	$\left(\frac{0,2\pi}{b}\right)^2 = \frac{0,395}{b^2}$
C	$\frac{5,19}{b^2}$	$\left(\frac{1,75\pi}{b}\right)^2 = \frac{0,395}{b^2}$
D	$\frac{-4}{b^2}$	$\frac{44,83}{b^2}$
E	$\frac{17,18}{b^2}$	$\frac{-16}{b^2}$

Gambar 3.3 menggambarkan fluks neutron pada reaktor papan dengan dua zona. Dari gambar ini terlihat bahwa dengan mengubah B_m^2, perataan fluks yang sebanding dengan sistem zona tunggal dapat dicapai. Di sini nilai B_m^2 di bagian tengah teras dibuat lebih rendah (misalnya dengan derajat pengkayaan yang lebih rendah dan dengan demikian nilai k_∞ yang lebih rendah) daripada zona di bagian luar. Perataan fluks yang demikian memberikan distribusi densitas daya yang lebih seragam, sehingga daya total yang lebih besar dapat diberikan tanpa melebihi batasan suhu tertentu.

Untuk menentukan distribusi fluks pada kedua zona dari reaktor kritis, persamaan difusi di zona 1 dan zona 2 harus diselesaikan.

$$D_1\nabla^2\phi_1 - \Sigma_{a1}\phi_1 + \nu\Sigma_{f1}\phi_1 = 0, \qquad |x| \leq \frac{a}{2} \tag{3.24}$$

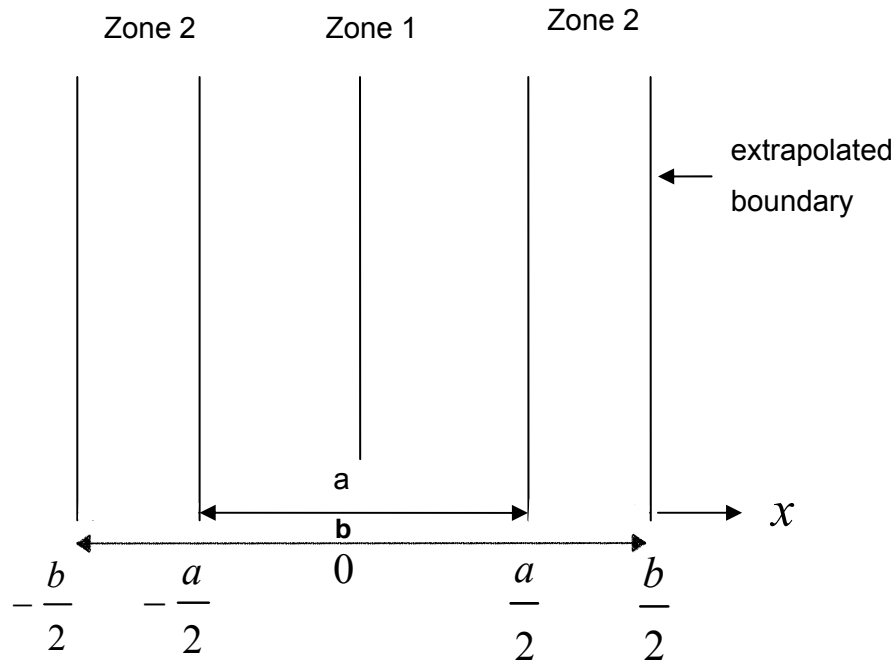
$$D_2\nabla^2\phi_2 - \Sigma_{a2}\phi_2 + \nu\Sigma_{f2}\phi_2 = 0, \qquad \frac{a}{2} \leq |x| \leq \frac{b}{2} \tag{3.25}$$

dengan a adalah lebar zona 1 dan b adalah dimensi luar reaktor termasuk jarak terekstrapolasi (lihat Gambar 3.4).

Syarat batas dan syarat antarmuka adalah sebagai berikut:

1. Simetri fluks di bagian tengah
$$\frac{d\phi_1(0)}{dx} = 0 \tag{3.26}$$

2. Kontinuitas fluks di antarmuka
$$\phi_1\left(\frac{a}{2}\right) = \phi_2\left(\frac{a}{2}\right) \tag{3.27}$$

3. Kontinuitas arus neutron di antarmuka
$$J_1\left(\frac{a}{2}\right) = J_2\left(\frac{a}{2}\right) \tag{3.28}$$

Gambar 3.4. *Geometri untuk reaktor dua zona berbentuk papan.*

4. Syarat batas untuk tepi vakum

$$\phi_2\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \tag{3.29}$$

Persamaan difusi untuk zona 1 dan 2 dapat dituliskan pula sebagai

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi_1(x) + B_{m1}^2\phi_1(x) = 0 \\ \nabla^2\phi_2(x) + B_{m2}^2\phi_2(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

dengan faktor *buckling* material B_m^2 dinyatakan dengan

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{k_\infty - 1}{L^2} \tag{3.31}$$

Penyelesaian dari Pers. (3.30) adalah

$$\phi_1(x) = A_1 \cos B_{m1}x + C_1 \sin B_{m1}x \tag{3.32}$$

$$\phi_2(x) = A_2 \cos B_{m2}x + C_2 \sin B_{m2}x \tag{3.33}$$

Karena fluks neutron pada reaktor tanpa sumber eksternal dapat ditentukan berdasarkan faktor yang sembarang, nilai $A_1 = 1$ dapat dipilih. Karena syarat simetris, $C_1 = 0$, sehingga

$$\phi_1(x) = \cos B_{m1}x \tag{3.34}$$

Dari syarat batas Pers. (3.29), ϕ_2 dapat dituliskan sebagai

$$\phi_2(x) = C_2' \sin B_{m2}\left(\frac{b}{2} - x\right) \tag{3.35}$$

Kemudian dari syarat batas Pers. (3.27), C_2' dapat ditentukan

$$\phi_2(x) = \frac{\cos B_{m1}\dfrac{a}{2}}{\sin B_{m2}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)} \sin B_{m2}\left(\frac{b}{2} - x\right) \tag{3.36}$$

Dengan syarat Pers. (3.28) tidak ada koefisien lain yang dapat ditentukan. Penerapan syarat ini menghasilkan persamaan sebagai berikut

$$D_1 B_{m1} \tan B_{m1}\frac{a}{2} = D_2 B_{m2} \cot B_{m2}\left(\frac{b-a}{2}\right) \tag{3.37}$$

Persamaan (3.37) merupakan syarat yang **harus** dipenuhi untuk reaktor kritis, di mana dimensi dari reaktor terkopel dengan sifat-sifat material. Untuk reaktor dua zona, persamaan kritis ini menggantikan syarat kritis untuk reaktor zona tunggal sebagai berikut

$$B_g^2 = B_m^2 \tag{3.38}$$

Untuk situasi yang dinyatakan pada Gambar 3.3, diasumsikan bahwa nilai $b = 2a$. Situasi A, dengan $B_{m1}^2 = B_{m2}^2$ dan $D_1 = D_2$, merupakan transisi menuju reaktor zona tunggal. Untuk situasi yang lain $D_1 = 0,75$, D_2 dipilih sehingga turunan dari fluks menjadi diskontinyu pada antarmuka. Untuk situasi B dan C, B_{m2}^2 dipilih dan B_{m1}^2 dihitung dari Pers. (3.37).

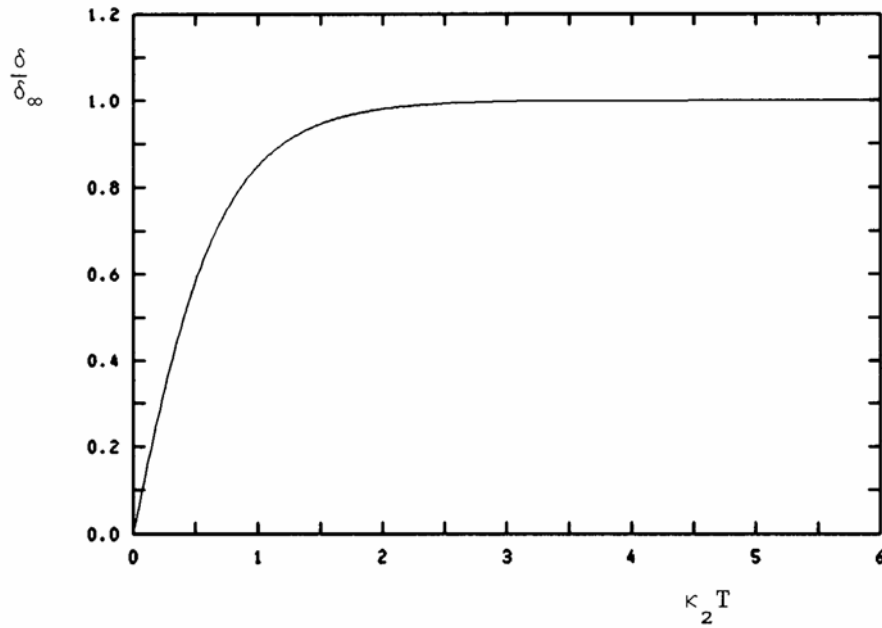
Untuk situasi D, B_{m1}^2 dipilih negatif. Kasus ini terjadi jika nilai $k_\infty < 1$. Perhatikan bahwa fluks di zona 1 menjadi cekung. Hal ini juga bisa dinyatakan secara metematis menggunakan Pers. (3.36) dengan memasang $B_{m1} = iB_{m1}'$ (i adalah bilangan imajiner, $i^2 = -1$) dan menerapkan relasi $\sin(iy) = i\sinh(y)$ dan $\cos(iy) = \cosh(y)$. Persamaan kritis kemudian menjadi

$$-D_1 B_{m1}' \tanh B_{m1}'\frac{a}{2} = D_2 B_{m2} \cot B_{m2}\left(\frac{b-a}{2}\right) \tag{3.39}$$

Pada situasi E, teras reaktor pada zona 1 dikelilingi oleh medium yang tidak melipatkan neutron (*non-multiplying medium*), atau biasa disebut dengan **reflektor**. Untuk kasus ini, sesuai dengan teori difusi satu kelompok berlaku hubungan

$$B_{m2}^2 = -\frac{1}{L_2^2} = -\kappa_2^2 \tag{3.40}$$

dengan $\kappa_2 = 1/L_2$ dengan mana fluks di zona 2 menjadi cekung. Dengan meletakkan reflektor neutron di sekitar teras, massa kritis dapat dikurangi. Persamaan kritis menjadi

$$D_1 B_{m1} \tan B_{m1}\frac{a}{2} = D_2\kappa_2 \coth \kappa_2\left(\frac{b-a}{2}\right) = D_2\kappa_2 \coth \kappa_2 T \tag{3.41}$$

Gambar 3.5. *Reflector savings sebagai fungsi dari ketebalan reflektor.*

dengan T adalah ketebalan reflektor.

3.3. *Reflector saving*

Agar ukuran "penghematan" yang dihasilkan dari penggunaan reflektor dapat diukur, diperkenalkan konsep *reflector saving*, δ, yang didefinisikan sebagai **selisih antara ukuran (panjang atau diameter) kritis teras aktif tanpa reflektor dengan ukuran kritis setelah diberi reflektor**.

Untuk geometri papan, *reflector saving* dinyatakan dengan

$$\delta = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}a \tag{3.42}$$

dengan a_0 adalah dimensi terektrapolasi reaktor papan kritis dengan teras tanpa reflektor. Dengan demikian

$$\delta = \frac{\pi}{2B_{m1}} - \frac{1}{2}a \tag{3.43}$$

Kemudian

$$\tan B_{m1}\delta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}B_{m1}a\right) = \cot\frac{1}{2}B_{m1}a = \frac{D_1 B_{m1}}{D_2\kappa_2}\tanh\kappa_2 T \tag{3.44}$$

sehingga

$$\delta = \frac{1}{B_{m1}}\arctan\left(\frac{D_1 B_{m1}}{D_2\kappa_2}\tanh\kappa_2 T\right) \tag{3.45}$$

Dengan menggunakan persamaan ini, kita dapat menghitung *reflector savings* sebagai fungsi dari ketebalan reflektor. Gambar 3.5 menunjukkan relasi antara δ dan T.

Dapat dilihat dari Gambar 3.5 bahwa *reflector savings* mempunyai nilai tertentu untuk $\kappa_2 T \to \infty$ sebesar

$$\delta_\infty = \frac{1}{B_{m1}} \arctan \frac{D_1 B_{m1}}{D_2 B_{m2}} \tag{3.46}$$

Secara fisis hal ini dapat dipahami sebagai berikut: ketika reflektor memiliki ketebalan beberapa kali panjang difusi, probabilitas bahawa neutron yang telah tiba di bagian luar dari reflektor akan dihamburkan kembali ke teras adalah sangat kecil, sehingga dengan mempertebal reflektor tidak akan menambah *saving*. Untuk itu kita harus memilih reflektor yang bagus yaitu material yang memiliki tampang lintang hamburan yang besar dan tampang lintang serapan yang kecil.

Dari Gambar 3.5 tampak bahwa penambahan ketebalan reflektor di atas 2 kali nilai panjang difusi ($2L_R$), *reflector saving* tidak akan bertambah secara signifikan. Untuk air, ketebalan $2L_R$ adalah sekitar 5 cm. Akan tetapi untuk air berat (D_2O) nilainya adalah sekitar 300 cm. Tentunya hal ini perlu diperhatikan dari sudut pandang *engineering* karena penambahan reflektor sebanyak itu akan menambah kompleksitas desain dan pembiayaan. Tabel 3.3 menampilkan data kemampuan moderasi untuk beberapa material.

Tabel 3.3. *Data kemampuan moderasi beberapa material*

Material	*Macroscopic Slowing Down Power*	*Moderating Ratio*	Panjang difusi, L (cm)	Panjang migrasi, M (cm)
H_2O	1,35	71	2,54	5,7
D_2O	0,176	5670	160	160
C (grafit)	0,060	192	53,5	56,8

CONTOH SOAL

1. Sebuah reaktor berbentuk bola mengandung uranium dengan pengkayaan tinggi (93%). Diketahui parameter neutronik untuk nuklida ^{235}U dan ^{238}U sebagaimana tercantum pada tabel berikut.

Nuklida	ν	σ_f (b)	σ_c (b)	σ_{tr} (b)
^{235}U	2,6	1,34	0,159	6,8
^{238}U	2,6	0,215	0,112	6,9

Tentukan jari-jari kritis reaktor polos tanpa reflektor serta massa kritisnya jika densitas logam uranium sebesar 18,75 g/cm^3.

Jawab:

Densitas atom untuk reaktor ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N(^{235}U) &= 0,04545 \cdot 10^{24}\,\mathrm{cm}^{-3} \\ N(^{238}U) &= 0,00256 \cdot 10^{24}\,\mathrm{cm}^{-3} \end{aligned}$$

Faktor multiplikasi k_∞ menjadi

$$k_\infty = \frac{N_5\nu_5\sigma_{f5} + N_8\nu_8\sigma_{f8}}{N_5\sigma_{a5} + N_8\sigma_{a8}} = 2,317$$

dengan panjang difusi sebesar

$$L = \sqrt{D/\Sigma_a} = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma_{tr}\Sigma_a}} = 3,846\,\mathrm{cm}$$

Buckling material dapat dihitung sebagai berikut

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2} = 0,0890\,\mathrm{cm}^2$$

Untuk sistem yang kritis, *bukling* material harus sama dengan *buckling* geometri. Oleh karena itu, jari-jari terekstrapolasi untuk bola adalah:

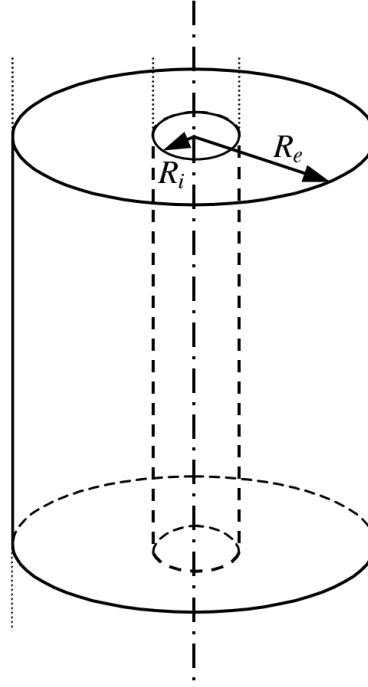
$$R_{extr} = \frac{\pi}{B_g} = \frac{\pi}{B_m} = 10,53\,\mathrm{cm}$$

Jari-jari yang sebenarnya adalah

$$R_{kritis} = R_{extr} - 0,71\lambda_{tr} = 8,361\,\mathrm{cm}$$

Karena densitas logam uranium sebesar 18,75 g/cm^3, maka massa kritis reaktor tersebut adalah 45,8 kg.

2. Sebuah teras reaktor berbentuk silinder yang berongga dan sangat tinggi berisi material fisil A. Teras reaktor tersebut mempunyai jari-jari dalam R_i dan jari-jari luar R_e, dan diselimuti oleh reflektor yang sangat besar yang terdiri dari material non-fisil B.

   Tentukan syarat kritis reaktor tersebut.

Gambar 3.6. *Geometri untuk reaktor silinder berongga.*

Jawab:

Untuk daerah teras A, persamaan difusi kondisi steady adalah

$$-D_A\nabla^2\phi_A + \Sigma_a^A\phi_A = \nu\Sigma_f^A\phi_A$$

atau dapat diubah menjadi persamaan

$$\nabla^2\phi_A + B_m^{A^2}\phi_A = 0$$

dengan

$$B_m^{A^2} = \frac{\nu\Sigma_f^A - \Sigma_a^A}{D_a}$$

adalah *buckling* material A.

Laplacian untuk geometeri silinder adalah

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\right)$$

sehingga persamaan difusi dapat dituliskan menjadi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi_A}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi(r)}{\partial r}\right) + B_m^{A^2}\phi_A = 0$$

yang solusi umumnya berbentuk persamaan Bessel orde nol,

$$\phi_A(r) = A_A J_0(B_m^A r) + C_A Y_0(B_m^A r)$$

Distribusi neutron ϕ_B di dalam reflektor akan ditentukan berdasarkan persamaan difusi neutron, akan tetapi karena reflektor tidak mengandung material fisil, maka suku fisi tidak muncul di persamaan difusi.

$$-D_B\nabla^2\phi_B + \Sigma_a^B\phi_B = 0$$

Untuk geometri silinder, persamaan difusi menjadi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi_B}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi(r)}{\partial r}\right) - \frac{1}{L_B^2}\phi_B = 0$$

dengan

$$L_B^2 = \frac{D_B}{\Sigma_a^B}$$

Solusi umum untuk persamaan di atas berbentuk

$$\phi_B(r) = A_B I_0(r/L_B) + C_B K_0(r/L_B)$$

Syarat batas:

(a) kontinuitas fluks di antarmuka teras dan reflektor

$$\phi_A(R_e) = \phi_B(R_e)$$

atau

$$A_A J_0(B_m^A R_e) + C_A Y_0(B_m^A R_e) = A_B I_0(R_e/L_B) + C_B K_0(R_e/L_B)$$

(b) kontinuitas densitas arus radial di antarmuka teras dan reflektor

$$J_r^A(R_e) = J_r^B(R_e)$$

atau menggunakan hukum Fick

$$-D_A\frac{\partial \phi_A}{\phi_r} = -D_B\frac{\partial \phi_B}{\partial r}$$

atau

$$-A_A D_A B_m^A J_1(B_m^A R_e) + C_A D_A B_m^A Y_1(B_m^A R_e) = -A_B \frac{D_B}{L_B} I_1(R_e/L_B) + C_B \frac{D_B}{L_B} K_1(R_e/L_B)$$

(c) Syarat batas ketiga berada pada antarmuka reaktor dengan bagian rongga tengah pada jari-jari R_i. Setiap neutron yang keluar dari teras reaktor menuju ke bagian rongga tengah akan masuk kembali ke teras reaktor di sisi yang lain. Dengan demikian, secara keseluruhan, tidak ada neutron yang diserap dan tidak ada neutron yang lolos. Karena sifat simetri reaktor, syarat yang sesuai untuk menggambarkan syarat batas ini adalah arus neutron radial adalah nol pada antarmuka.

$$J_r^A(R_i) = 0$$

atau

$$A_A D_A B_m^A J_1(B_m^A R_i) + C_A D_A B_m^A Y_1(B_m^A R_i) = 0$$

(d) neutron harus berhingga besarnya di reflektor pada posisi yang mendekati tak hingga

$$\lim_{r\to\infty} \phi_B(r) = A_B \lim_{r\to\infty} I_0(r/L_B) + C_B \lim_{r\to\infty} K_0(r/L_B) = \text{berhingga}$$

Dari persamaan di atas dapat ditentukan nilai

$$A_B = 0$$

Dari persamaan-persamaan syarat batas dapat disusun matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} J_0(B_m^A R_e) & Y_0(B_m^A R_e) & -I_0(R_e/L_B) & -K_0(R_e/L_B) \\ D_A B_m^A J_1(B_m^A R_e) & D_A B_m^A Y_1(B_m^A R_e) & \frac{D_B}{L_B} I_1(R_e/L_B) & -\frac{D_B}{L_B} K_1(R_e/L_B) \\ D_A B_m^A J_1(B_m^A R_i) & D_A B_m^A Y_1(B_m^A R_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_A \\ C_A \\ A_B \\ C_B \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan matriks di atas dapat diselesaikan *jika dan hanya jika* determinan matriks sama dengan nol

$$\begin{vmatrix} J_0(B_m^A R_e) & Y_0(B_m^A R_e) & -I_0(R_e/L_B) & -K_0(R_e/L_B) \\ D_A B_m^A J_1(B_m^A R_e) & D_A B_m^A Y_1(B_m^A R_e) & \frac{D_B}{L_B} I_1(R_e/L_B) & -\frac{D_B}{L_B} K_1(R_e/L_B) \\ D_A B_m^A J_1(B_m^A R_i) & D_A B_m^A Y_1(B_m^A R_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

atau setelah disederhanakan menjadi

$$\begin{vmatrix} J_0(B_m^A R_e) & Y_0(B_m^A R_e) & -K_0(R_e/L_B) \\ D_A B_m^A J_1(B_m^A R_e) & D_A B_m^A Y_1(B_m^A R_e) & -\frac{D_B}{L_B} K_1(R_e/L_B) \\ J_1(B_m^A R_i) & Y_1(B_m^A R_i) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan di atas merupakan syarat kritis untuk reaktor berongga.

Bentuk determinan di atas dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} &\frac{D_B}{L_B} K_1(\frac{R_e}{L_B}) \left[Y_0(B_m^A R_e) J_1(B_m^A R_i) - J_0(B_m^A R_e) Y_i(B_m^A R_i) \right] \\ = &D_A B_m^A K_0(\frac{R_e}{L_B}) \left[J_1(B_m^A R_e) Y_1(B_m^A R_i) - Y_1(B_m^A R_e) J_1(B_m^A R_i) \right] \end{aligned}$$

Latihan

1. Sebuah reaktor polos berbentuk silinder mempunyai tinggi 100 cm dan diameter 100 cm beroperasi dalam keadaan ajeg dengan daya sebesar 20 MW. Jika titik sumbu koordinat di ambil di tengah-tengah reaktor, tentukan densitas daya reaktor di titik $r = 7$ cm dan $z = -22,5$ cm.

2. Diusulkan untuk menyimpan larutan uranil sulfat ($^{235}\mathrm{UO_2SO_4}$) ke dalam air dengan konsentrasi 30 g bahan kimia tersebut per liter air. Apakah prosedur penyimpanan tersebut aman jika ukuran tanki tidak ditentukan ?

3. Susunlah persamaan kritis untuk reaktor dengan geometri:

   (a) bola

   (b) silinder

   yang berjari-jari R dan tebal reflektor b.

4. Sebuah reaktor berbentuk papan terdiri dari campuran homogen antara ^{235}U dan berilium. Reaktor tersebut kritis tanpa ada reflektor. Selanjutnya akan ditambahkan reflektor grafit di tepi luar reaktor tersebut. Tentukan ketebalan reflektor jika dikehendaki *reflector saving* sebesar 3 cm.

5. Teras aktif sebuah reaktor termal berupa bola dengan jari-jari 50 cm dan mengandung campuran homogen antara ^{235}U dan air. Teras tersebut kritis ketika diselimuti oleh reflektor air tak hingga besar.

   (a) Berapa besarnya *reflector saving* ?

   (b) Berapa massa kritis reaktor tersebut ?

   (c) Jika fluks termal sebesar 10^{13} n/cm^2-s, pada daya berapakah reaktor tersebut beroperasi ?

6. Mirip seperti Latihan no. 5, akan tetapi reaktor kritis tanpa reflektor pada jari-jari 50 cm. Berapa besarnya *reflector saving* jika reaktor kemudian diberi reflektor air tak hingga besar?

7. Sebuah reaktor grafit-uranium berbentuk bola mempunyai *buckling* material sebesar 2×10^{-4} cm^{-2}.

   (a) Tetapkan persentase bahan bakar yang dapat dihemat kalau dipakai reflektor grafit setebal 45 cm.

   (b) Tetapkan angka perbandingan antara fluks rata-rata dan fluks maksimum dalam teras reaktor.

   (c) Berapa daya reaktor kalau bekerja pada fluks maksimum sebesar 10^{13} n/cm^2-s.

Bab 4

Fluks Neutron Gayut Energi

God used beautiful mathematics in creating the world.

PAUL A.M. DIRAC

Learning outcomes :

- Mampu menyusun persamaan difusi neutron multigrup.
- Mampu menghitung distribusi neutron dan faktor multiplikasi pada kondisi ajeg menggunakan metode difusi multigrup.

Minggu ke : 3, 4 dan 5

I bab-bab sebelumnya kita membahas perilaku reaktor kondisi ajeg menggunakan teori difusi untuk neutron mono-energetik atau teori difusi satu kelompok. Di bab ini kita akan memperhatikan kegayutan energi untuk spektrum neutron di reaktor.

Secara umum kita dapat menuliskan persamaan difusi gayut waktu sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},E,t)}{\partial t} &= \nabla\cdot D(\mathbf{r},E)\nabla\phi(\mathbf{r},E,t) - \Sigma_t(\mathbf{r},E)\phi(\mathbf{r},E,t)\\ &+ S(\mathbf{r},E,t) + \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r},E'\to E)\phi(\mathbf{r},E',t)dE'\end{aligned} \tag{4.1}$$

Untuk mendapatkan solusi analitik dari persamaan difusi gayut waktu sangatlah sulit, maka perlu dilakukan pendekatan-pendekatan yang sesuai.

4.1. Transfer energi dengan cara tumbukan elastis

Neutron yang dihasilkan dari pembelahan inti mempunyai energi rata-rata sebesar 2 MeV. Neutron ini akan mengalami beberapa kali tumbukan sebelum diserap. Dengan jalan tumbukan ini baik secara elastis maupun non-elastis, neutron akan kehilangan energinya sehingga spektrum reaktor selalu akan "lebih lunak" daripada spektrum fisi. Pada reaktor termal, proses moderasi neutron ini akan bermanfaat karena tingginya nilai tampang lintang pada energi yang lebih rendah. Neutron pada reaktor ini akan tepat diserap ketika mereka berada pada kesetimbangan kinetis dengan inti-inti atom.

Hamburan elastis dapat ditinjau sebagai tumbukan antara dua bola yang keras dan dapat dijelaskan dengan bantuan mekanika klasik. Neutron dengan massa m mempunyai kecepatan sebelum tumbukan sebesar $\mathbf{v}'$ dan setelah tumbukan mempunyai kecepatan sebesar $\mathbf{v}$. Energi neutron sebesar $E' = \frac{1}{2}mv'^2$ lebih besar daripada energi inti atom sehingga inti atom dapat dianggap dalam keadaan diam. Setelah tumbukan, inti atom mempunyai kecepatan sebesar $\mathbf{V}$. Dengan menggunakan hukum kekekalan momentum dan energi, kecepatan neutron setelah tumbukan dapat dihitung. Perhitungan ini lebih sederhana dengan menggunakan transformasi ke sistem pusat massa di mana titik awal koordinat terletak pada titik pusat massa dari partikel-partikel yang bertumbukan (lihat Gambar 4.1). Ini merupakan sistem koordinat yang bergerak dengan kecepatan sebesar

$$\mathbf{v}'_{pm} = \frac{m\mathbf{v}' + M\mathbf{V}'}{m+M} = \frac{m\mathbf{v}'}{m+Am} = \frac{1}{A+1}\mathbf{v}' \tag{4.2}$$

dengan $A = M/m$. Apabila kecepatan neutron dan inti atom pada sistem pusat massa masing-masing dinyatakan dengan u dan U, maka berlaku

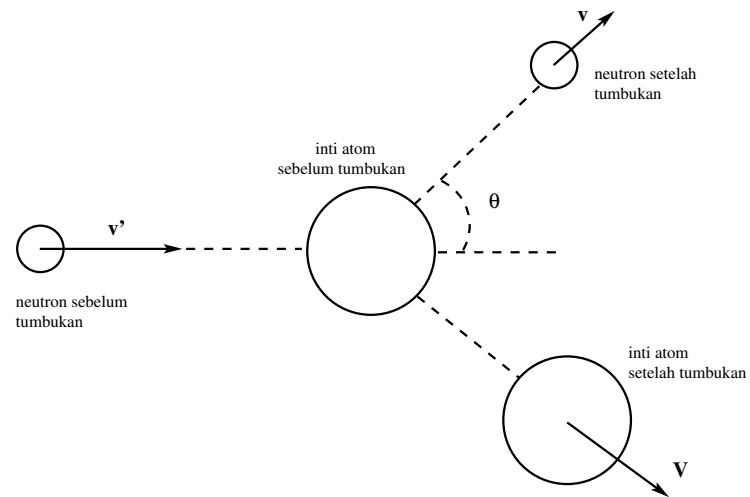
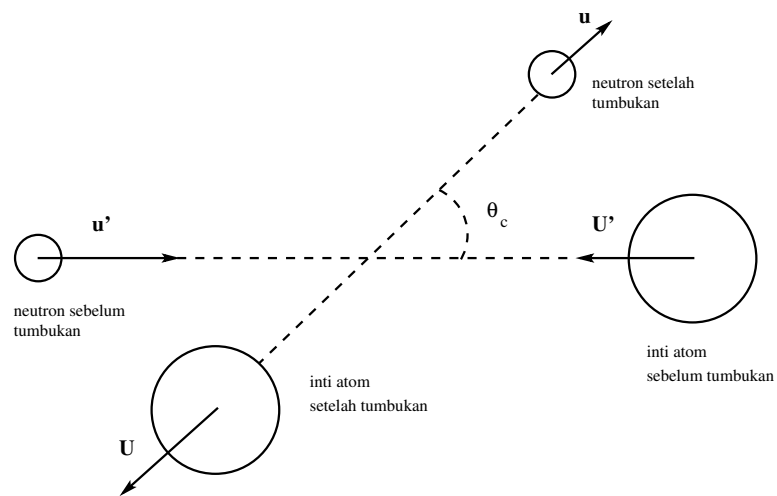
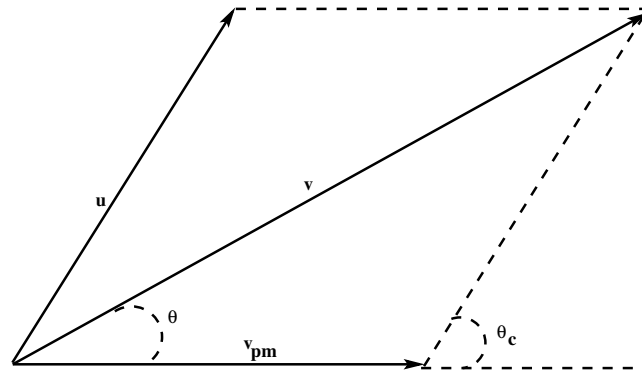
$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v}_{pm} = \frac{A}{A+1}\mathbf{v}' \tag{4.3}$$

$$\mathbf{U}' = \mathbf{V}' - \mathbf{v}_{pm} = -\frac{1}{A+1}\mathbf{v}' \tag{4.4}$$

Momentum pada sistem pusat massa baik ketika sebelum maupun sesudah tumbukan sama dengan nol, sehingga kecepatan setelah tumbukan berlaku

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{A}\mathbf{u} \tag{4.5}$$

Hukum kekekalan energi kinetik yang diterapkan pada sistem pusat massa menyatakan

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{A}{A+1}v'\right)^2 + \frac{1}{2}mA\left(\frac{1}{A+1}v'\right)^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mA\left(\frac{1}{A}u\right)^2 \tag{4.6}$$

Gambar 4.1. *Tumbukan pada sistem laboratorium dan sistem pusat massa.*

Gambar 4.2. *Transformasi ke sistem laboratorium.*

Di sini berlaku besarnya kecepatan setelah tumbukan pada sistem pusat massa sebesar

$$u = \frac{A}{A+1}v' \tag{4.7}$$

$$U = \frac{1}{A+1}v' \tag{4.8}$$

di mana terbukti bahwa besarnya kecepatan pada sistem pusat massa setelah tumbukan tidak berubah. Kecepatan neutron pada sistem laboratorium dapat diperoleh dengan cara transformasi

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_{pm} \tag{4.9}$$

Pada sistem pusat massa, neutron akan dihamburkan dengan sudut θ_c (lihat Gambar 4.2), sehingga dengan bantuan aturan kosinus akan didapatkan

$$v^2 = \left(\frac{A}{A+1}\right)^2 v'^2 + \left(\frac{1}{A+1}\right)^2 v'^2 + 2\frac{A}{(A+1)^2}v'^2\mu_c \tag{4.10}$$

dengan $\mu_c = \cos\theta_c$. Dengan demikian dapat diperoleh

$$\frac{E}{E'} = \frac{v^2}{v'^2} = \frac{A^2 + 2A\mu_c + 1}{(A+1)^2} \tag{4.11}$$

dengan energi setelah tumbukan dinyatakan dalam energi sebelum tumbukan dan sudut hamburan pada sistem pusat massa.

Transfer energi maksimal terjadi ketika $\theta_c = 180°$ atau $\mu_c = -1$, jadi dengan tumbukan frontal (*head on*/adu depan)

$$\left(\frac{E}{E'}\right)_{\text{min}} = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \alpha \tag{4.12}$$

Untuk H-1 berlaku (dengan sedikit pembulatan) $A = 1$, sehingga $\alpha = 0$. Dengan tumbukan frontal neutron akan mentransfer semua energinya ke inti hidrogen. Untuk C-12 hilangnya energi maksimal

sebesar 28,4% dan untuk U-235 hanya sebesar 1,7%. Agar moderasi berlangsung dengan efektif pada reaktor termal, maka material yang digunakan harus mempunyai nilai A yang kecil.

Tentu saja tidak semua tumbukan berlangsung secara frontal, sehingga kita harus melihat distribusi peluang untuk transfer energi tertentu. Ternyata untuk energi di bawah 1 MeV hamburan yang terjadi pada sistem pusat massa bersifat *isotropis*, artinya semua sudut mempunyai peluang kemunculan yang sama. Untuk probabilitas peluang pada sudut $\mathbf{\Omega}_c$ pada sistem pusat massa berlaku

$$p(\mathbf{\Omega}_c)d\Omega_c = \frac{d\Omega_c}{4\pi} \tag{4.13}$$

Distribusi peluang untuk kosinus dari sudut hamburan μ_c pada sistem pusat massa melalui integrasi terhadap sudut azimut ψ_c sebesar

$$p(\mu_c) = \int_0^{2\pi} p(\mathbf{\Omega}_c)d\psi_c = \frac{1}{2} \tag{4.14}$$

Karena energi E setelah tumbukan hanya gayut terhadap μ_c, distribusi peluang untuk energi setelah hamburan dapat dinyatakan dengan

$$p(E' \to E) = p(\mu_c)\frac{d\mu_c}{dE} = \frac{p(\mu_c)}{\frac{dE}{d\mu_c}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2A}{(A+1)^2}E'} = \frac{1}{E'(1-\alpha)} \tag{4.15}$$

Karena distribusi peluang tidak gayut terhadap E maka semua energi di antara $\alpha E'$ dan E' mempunyai peluang yang sama. Tampang lintang hamburan diferensial $\Sigma_s(E' \to E)$ yang terdapat pada Pers. (4.1) dan (4.84) dapat dituliskan sebagai

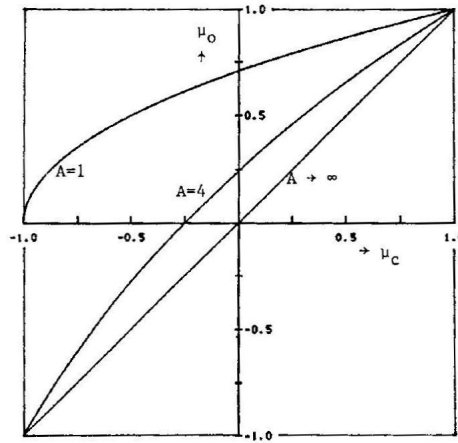
$$\Sigma_s(E' \to E) = \frac{\Sigma_s(E')}{E'(1-\alpha)}, \qquad \alpha E' < E < E' \tag{4.16}$$

Dari Gambar 4.2 dapat ditentukan pula hubungan antara sudut hamburan pada sistem pusat massa dengan sistem laboratorium. Jika $\mu_0 = \cos\theta$ didefinisikan sebagai nilai kosinus sudut hamburan pada sistem laboratorium, maka berlaku

$$v\mu_0 = v_{pm} + u\mu_c \tag{4.17}$$

atau

$$\mu_0 = \frac{1}{A+1}\frac{v'}{v} + \frac{A}{A+1}\frac{v'}{v}\mu_c = \frac{A\mu_c + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\mu_c + 1}} \tag{4.18}$$

Hubungan ini ditunjukkan pada Gambar 4.3. Sifat isotropi pada sistem pusat massa dengan demikian akan memberikan kecenderungan pada hamburan ke depan (*forward scattering*) pada sistem laboratorium, di mana semakin ringan inti atom yang ditumbuk oleh neutron akan semakin melenceng dari sifat isotropi. Pada energi neutron yang tinggi tampak pula pada sistem pusat massa adanya kecenderungan ke arah depan, sehingga hal ini akan semakin memperkuat kecenderungan ke arah depan pada sistem laboratorium dan akibatnya adanya kecenderungan pada transfer energi yang lebih kecil.

Gambar 4.3. *Hubungan antara kosinus sudut hamburan pada sistem pusat massa dengan sistem laboratorium.*

Tabel 4.1. *Data moderasi untuk beberapa unsur*

Unsur	A	ξ	N(2 MeV $\rightarrow$ 1 eV)
H	1	1,000	15
D	2	0,725	20
He	4	0,425	34
Be	9	0,207	70
C	12	0,158	92
O	16	0,120	121

Dengan bantuan Pers. (4.18) dapat ditentukan nilai rata-rata kosinus sudut hamburan pada sistem laboratorium, $\overline{\mu}_0$, yang mana muncul pada definisi tampang lintang transport dan juga pada koefisien difusi

$$\overline{\mu}_0 = \int_{-1}^{1} \mu_0 p(\mu_0) d\mu_0 = \int_{-1}^{1} \mu(\mu_c) p(\mu_c) d\mu_c = \frac{2}{3A} \tag{4.19}$$

Karena pada tumbukan elastis rata-rata per tumbukan terdapat penurunan fraksi energi yang konstan, maka akan lebih mudah jika digunakan besaran yang bersifat logaritmis. Oleh karena itu didefinisikan penurunan energi logaritmis rata-rata per tumbukan:

$$\xi = \overline{\ln E' - \ln E} = \int_{\alpha E'}^{E'} \ln \frac{E'}{E} \, p(E' \rightarrow E) \, dE = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \tag{4.20}$$

Dengan bantuan besaran ini dengan mudah dapat dihitung rata-rata banyaknya tumbukan agar neutron mengalami perlambatan dari misal 2 MeV menjadi 1 eV:

$$N(2 \text{ MeV} \rightarrow 1 \text{ eV}) = \ln 2 \cdot 10^6 / \xi = 14,5/\xi \tag{4.21}$$

Tabel 4.1 menunjukkan data moderasi untuk beberapa unsur.

Sehubungan dengan sifat logaritmis dari proses moderasi, digunakan pula pengertian *letargi*, u, sebagai ganti energi, yang didefinisikan sebagai

$$u(E) = \ln \frac{E_0}{E} \tag{4.22}$$

dengan E_0 adalah energi referensi yang dipilih. Misalkan dipilih $E_0 = 2$ MeV, maka letargi neutron dengan energi fisi rata-rata sama dengan nol, sementara $u(1$ eV) = 14,5. Banyaknya tumbukan rata-rata agar letargi u tercapai adalah sebesar

$$n(u) = u/\xi \tag{4.23}$$

Sekarang dengan mudah dapat ditentukan syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh bahan moderator yang bagus:

1. Σ_s besar
2. ξ besar
3. Σ_a kecil

Hasil kali $\xi\Sigma_s$ disebut dengan daya perlambatan (*slowing-down power*) dan menyatakan hilangnya energi logaritmis rata-rata per satuan panjang lintasan yang dilalui oleh neutron. Besarn $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$ disebut dengan kualitas moderator atau kapasitas moderasi (*moderating capacity*). Tabel 4.2 menunjukkan data bahan moderator.

Tabel 4.2. *Daya perlambatan*

Moderator	Daya perlambatan	Kapasitas moderasi
H_2O	1,350	71
D_2O	0,176	6000
Be	0,158	143
C	0,060	192

Dari Tabel 4.2 tampak bahwa air ringan lebih cepat memperlambat neutron daripada air berat. Akan tetapi karena air ringan masih menyerap neutron maka air berat merupakan bahan moderator yang lebih baik. Hal ini antara lain mempunyai konsekuensi bahwa reaktor air ringan harus menggunakan uranium yang diperkaya (yaitu lebih dari 0,71% U-235) sementara pada reaktor air ringan dapat digunakan uranium alam.

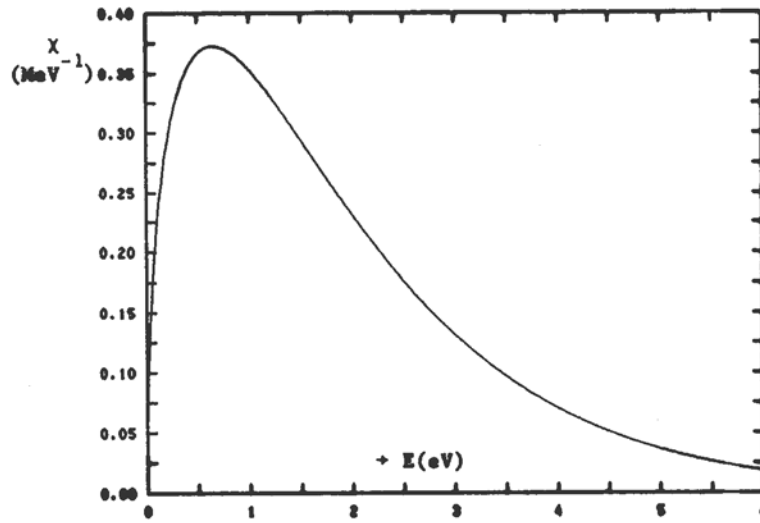
4.2. Spektrum neutron

Kita akan melihat bagaimana fluks pendekatan direpresentasikan pada sebuah reaktor termal. Energi neutron akan dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok cepat (kira-kira di atas 100 keV), kelompok epitermal (antara 0,5 eV dan 100 keV) dan kelompok termal (di bawah 0,5 eV).

4.2.1. Daerah cepat

Neutron yang berada pada daerah ini dihasilkan dari reaksi fisi. Oleh karenanya fluks neutron cepat akan sesuai dengan spektrum fisi yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\chi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\sqrt{E}e^{-E/T} \tag{4.24}$$

dengan T adalah suhu imajiner dalam satuan energi ($T = 1,3$ MeV) dan E adalah energi neutron. Gambar 4.4 menunjukkan spektrum fisi pada U-235.

Gambar 4.4. *Spektrum fisi dari U*^{235}.

Spektrum fisi dapat didekati dengan persamaan berikut ini

$$\chi(E) = 0,453\exp(-1,036E)\sinh(\sqrt{2,29E}) \tag{4.25}$$

untuk U-235 dan

$$\chi(E) = 0,6739\sqrt{E}\exp(-E/1,41) \tag{4.26}$$

untuk Pu-239.

Formula empiris yang lebih akurat untuk mendeskripsikan spektrum fisi adalah dengan menggunakan model Madland-Nix yang dirumuskan sebagai berikut

$$\chi(E) = \sum_{j=1}^{3} A_j \exp\left[\frac{-E}{B_j}\right] \tag{4.27}$$

dengan nilai masing-masing koefisien tercantum pada Tabel 4.3.

Untuk menentukan fluks neutron di atas energi 0,5 MeV, perlu diperhatikan bahwa fisi merupakan kontributor terpenting, sehingga persamaan difusi dapat didekati dengan

Tabel 4.3. *Koefisien untuk model Madland-Nix*

Parameter	U-235	Pu-239	U-238	U-233	Cf-252
A_1	1,450	1,232	1,380	1,310	1,040
A_2	-1,270	-1,079	-1,220	-1,150	-0,890
A_3	-0,154	-0,146	-0,155	-0,149	-0,138
B_1	1,470	1,610	1,490	1,540	1,730
B_2	0,870	0,902	0,860	0,880	0,890
B_3	0,053	0,057	0,053	0,055	0,056

$$(\Sigma_a + \Sigma_s)\phi(E) \approx \frac{\chi(E)}{k_\infty} \int_0^\infty \nu\Sigma_f(E')\phi(E')\, dE' \tag{4.28}$$

atau

$$\phi(E) \approx \frac{\chi(E)}{(\Sigma_a + \Sigma_s)k_\infty} \int_0^\infty \nu\Sigma_f(E')\phi(E')\, dE' \approx \frac{\chi(E)}{\Sigma_t} \tag{4.29}$$

4.2.2. Spektrum epitermal

Distribusi neutron gayut ruang dan energi pada sebuah reaktor dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan difusi gayut energi. Secara umum, biasanya digunakan program komputer untuk menyelesaikannya. Akan tetapi dengan menggunakan beberapa asumsi penyederhanaan kita dapat mendapatkan pemahaman tentang distribusi energi neutron selama proses moderasi. Pertama, kita batasi rentang energi sehingga neutron sumber (berasal dari fisi dan sumber eksternal) telah melalui sejumlah tumbukan sebelum melewati batas atas rentang tersebut. Di samping itu, batas bawah rentang energi berada di atas rentang di mana gerakan termal inti atom mulai memegang peranan dan inti atom tidak lagi dapat dianggap tidak bergerak terhadap neutron. Rentang yang dipilih dengan cara ini mulai dari 1 eV sampai dengan 100 keV dan biasa disebut dengan *rentang epitermal*. Pada rentang ini kita anggap hamburan yang terjadi bersifat elastis dan tampang lintang hamburan diferensial dinyatakan sebagai

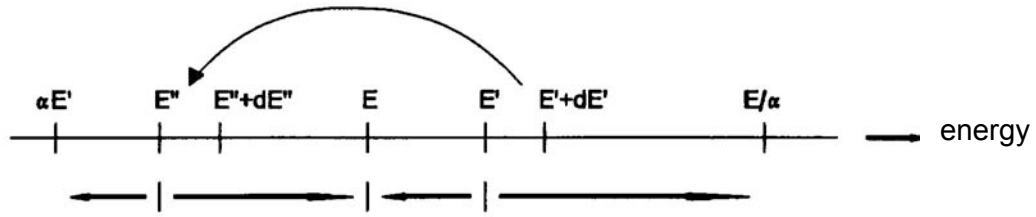
$$\Sigma_s(E' \to E) = \frac{\Sigma_s(E')}{E'(1-\alpha)}, \qquad \alpha E' < E < E' \tag{4.30}$$

dengan α dinyatakan dengan

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \tag{4.31}$$

dan A adalah nomor massa inti atom.

Persamaan difusi gayut energi (Pers. (4.1)) untuk keadaan ajeg (*steady state*) menjadi

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E) - \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) + \int_E^{E/\alpha} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \to E)\phi(\mathbf{r}, E')\, dE' = 0 \tag{4.32}$$

Gambar 4.5. *Diagram energi untuk perhitungan densitas perlambatan.*

Jika kita menganggap mediumnya homogen dan tak hingga besar (dengan demikian tidak ada bocoran) dan proses serapan selama moderasi juga dapat diabaikan ($\Sigma_a\phi = 0$), maka Pers. (4.32) menjadi

$$\Sigma_s(E)\phi(E) = \int_E^{E/\alpha} \frac{\Sigma_s(E')}{E'(1-\alpha)}\phi(E')\,dE' \tag{4.33}$$

Dengan melakukan substitusi, solusi penyelesaian ini adalah

$$F(E) = \Sigma_s(E)\phi(E) = \frac{C}{E} \tag{4.34}$$

Konstanta C dapat ditentukan dengan menggunakan densitas perlambatan (*slowing-down density*), $q(E)$, yaitu banyaknya neutron yang "melewati" energi E per cm^3 per detik. Karena kita mengasumsikan tidak ada serapan maupun bocoran, q menjadi tidak gayut terhadap energi dan sama dengan kuat sumber per cm^3 sebagai hasil dari reaksi fisi. Untuk densitas perlambatan, berlaku (lihat Gambar 4.5)

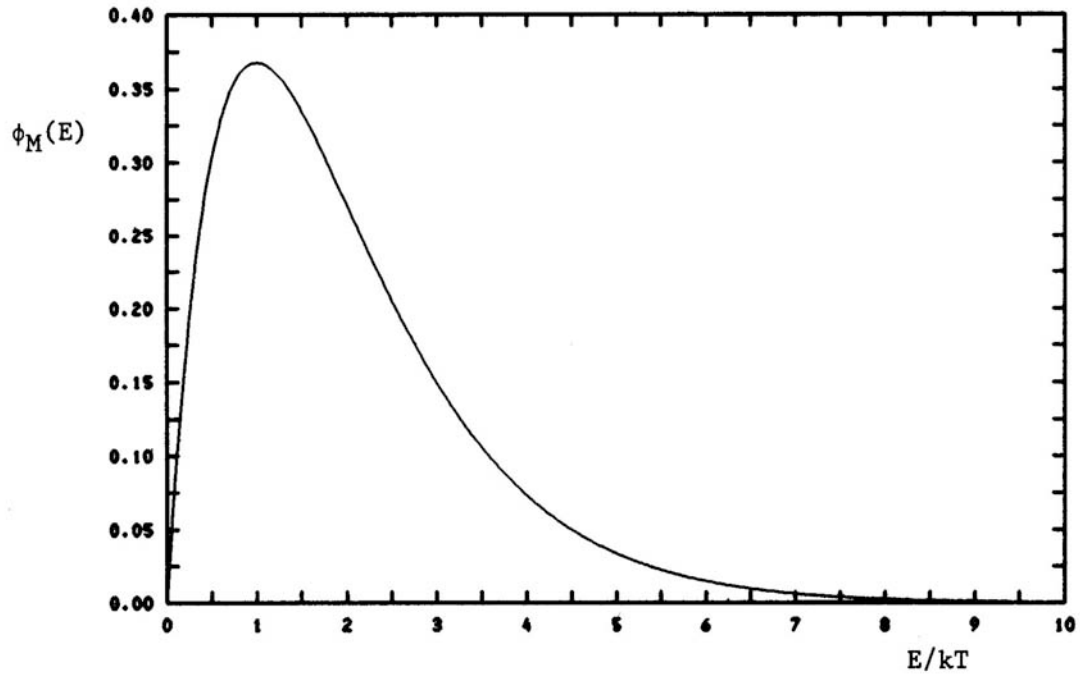
$$\begin{aligned} q &= \int_{E'=E}^{E/\alpha}\int_{E''=\alpha E}^{E} \Sigma_s(E'\to E'')\,dE''\,\phi(E')dE' \\ &= \int_E^{E/\alpha} \Sigma_s(E')\phi(E')\frac{E-\alpha E'}{E'(1-\alpha)}dE' \\ &= C\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\alpha\right) = C\xi \end{aligned} \tag{4.35}$$

Dengan demikian untuk spektrum epitermal berlaku

$$\phi(E) = \frac{q}{\xi\Sigma_s(E)E} \tag{4.36}$$

Karena besarnya $\Sigma_s(E)$ tidak banyak bervariasi pada sebagian besar rentang energi epitermal (hamburan potensial), dengan asumsi yang telah disebutkan di atas akan terdapat apa yang disebut dengan "spektrum 1/E".

4.2.3. Spektrum neutron termal

Ketika neutron fisi berada pada medium tak hingga yang bebas dari serapan, setelah mengalami moderasi mereka akan menjadi setimbang "termal" dengan inti atom moderator. Dengan kata lain neutron berperilaku seperti gas yang sangat encer pada kesetimbangan termal. Distribusi energinya kemudian

Gambar 4.6. *Densitas fluks termal berdasarkan persamaan Maxwell-Boltzmann.*

dapat dinyatakan dengan distribusi Maxwell-Boltzmann untuk partikel gas ideal pada suhu T

$$M(E) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \tag{4.37}$$

dengan k adalah konstanta Boltzmann ($k = 8,52 \cdot 10^{-5}$ eV/K). Fungsi distribusi $M()$ dinormalisasi sehingga integral energinya sama dengan 1.

Dengan demikian densitas fluks termal menjadi

$$\phi_M(E) = n_0 v M(E) = \frac{2\pi n_0}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{2/m} E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \tag{4.38}$$

dengan n_0 adalah densitas neutron termal total. Distribusi ini ditunjukkan pada Gambar 4.6.

Energi yang paling mungkin (*most probable energy*) yaitu spektrum yang maksimum adalah sebesar $E = kT$. Pada suhu ruang, nilainya sebesar 0,025 eV. Kecepatan yang sesuai dengan energi ini adalah sebesar 2200 m/s. Oleh karenanya, tabel "tampang lintang termal" biasanya dinyatakan pada kecepatan ini. Pada reaktor dengan suhu 590 K (karakteristik untuk reaktor bermoderator air), kecepatan yang paling mungkin adalah 3100 m/s dan energi sebesar 0,051 eV.

Distribusi seperti pada Pers. (4.38) hanya berlaku untuk kesetimbangan termal yang sempurna. Pada sebuah reaktor nuklir, kesetimbangan ini tidak akan pernah tercapai karena adanya serapan neutron dan adanya pasokan neutron secara kontinyu dari energi epitermal akibat moderasi neutron. Karena sebagain besar tampang lintang serapan pada energi rendah menunjukkan perilaku $1/\sqrt{E}$, neutron energi rendah akan lebih mudah diserap dan mengakibatkan pergeseran spektrum neutron ke energi yang lebih tinggi.

Pasokan secara kontinyu neutron yang mengalami perlambatan juga memberikan pengaruh yang serupa, karena pada bagian energi yang tinggi spektrum termal mempunyai bentuk $1/E$.

Meskipun bocoran neutron memberikan pengaruh yang sebaliknya karena seiring dengan pengurangan energi nilai dari koefisien difusi D berkurang sebagai akibat naiknya tampang lintang dan bocoran lebih banyak terjadi pada neutron dengan energi yang lebih tinggi, pengaruh bocoran ini kurang penting. Agar spektrum masih dapat dinyatakan dengan baik menggunakan Pers. (4.38), kita memperkenalkan suhu neutron T_n yang lebih tinggi daripada suhu yang sebenarnya.

Untuk perhitungan reaktor global, neutron termal diperlakukan sebagai satu kelompok saja. Untuk menghitung konstanta kelompok termal dengan Pers. (4.81) – (4.85), spektrum termal harus diperhitungkan. Dengan cara ini tampang lintang serapan rata-rata termal dengan kegayutan $1/v$ menjadi

$$\sigma_{a,th} = \frac{\int_0^\infty \sigma_a(E)\phi_M(E,T_n)dE}{\int_0^\infty \phi_M(E,T_n)dE} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sigma_{a0}\sqrt{\frac{293}{T_n}} \tag{4.39}$$

dengan σ_{a0} adalah tampang lintang serapan mikroskopik untuk neutron 2200 m/s dan T_n adalah suhu neutron efektif untuk spektrum termal dalam kelvin.

4.3. Teori Umur Fermi

Persamaan (4.1) adalah persamaan difusi umum untuk medan neutron yang gayut ruang dan waktu. Di Bagian 4.2.2, persamaan ini diselesaikan untuk kasus yang disederhanakan pada medium homogen tak hingga besar tanpa serapan neutron. Di Bagian 4.6 akan dipelajari pengaruh serapan resonansi di medium yang homogen tak hingga besar. Di bagian ini dianalisis proses moderasi gayut ruang. Teori yang menjelaskannya dikenal dengan nama **Teori Umur Fermi** atau *Fermy Age Theory*.

Kesetimbangan neutron untuk volume satuan dan interval energi dE untuk medium yang homogen dan bebas serapan dapat dituliskan sebagai

$$D(E)\nabla^2\phi(\mathbf{r},E)\,dE = q(\mathbf{r},E) - q(\mathbf{r},E+dE) \tag{4.40}$$

sehingga

$$D(E)\nabla^2\phi(\mathbf{r},E) = -\frac{\partial q}{\partial E} \tag{4.41}$$

Dengan memasukkan hubungan antara densitas perlambatan, q dengan fluks neutron, Pers. (4.41) dapat diubah menjadi persamaan untuk densitas perlambatan.

Dari pembahasan di subbab sebelumnya, kita dapat merumuskan densitas perlambatan

$$q(\mathbf{r},E) = \int_E^{E/\alpha} \frac{E-\alpha E'}{E'(1-\alpha)}\Sigma_s(E')\phi(\mathbf{r},E')\,dE' \tag{4.42}$$

di mana untuk kasus tanpa bocoran neutron dapat diselesaikan menggunakan

$$E\,\Sigma_s(E)\,\phi(E) = \text{konstan} \tag{4.43}$$

Untuk fluks yang gayut ruang, Pers. (4.43) tidak valid karena neutron akan bocor dari elemen volume. Akan tetapi, jika diasumsikan bahwa inti atom yang menghamburkan neutron relatif berat, maka interval integrasi di Pers. (4.42) menjadi kecil ($\alpha \approx 1$) sehingga Pers. (4.43) menjadi pendekatan yang bagus di dalam interval tersebut. Asumsi ini eksak jika lebar interval mendekati nol, atau dengan kata lain untuk kondisi penurunan energi per tumbukan sangat kecil sehinga moderasi neutron merupakan proses yang kontinyu. Pendekatan semacam ini oleh karenanya dikenal sebagai **model perlambatan kontinyu** atau *Continuous Slowing Down Model* (CSDM). Untuk kasus ini, Pers. (4.42) dapat ditulis sebagai

$$q(\mathbf{r}, E) = E\,\Sigma_s(E)\,\phi(\mathbf{r}, E) \int_E^{E/\alpha} \frac{E - \alpha E'}{E'^2(1-\alpha)} dE' = \xi \Sigma_s(E)\,E\,\phi(\mathbf{r}, E) \tag{4.44}$$

Dengan menggabungkan Pers. (4.41) dengan (4.44) akan didapatkan

$$\nabla^2 q(\mathbf{r}, E) = -\frac{\xi \Sigma_s(E) E}{D(E)} \cdot \frac{\partial q(\mathbf{r}, E)}{\partial E} \tag{4.45}$$

Dengan menggunakan variabel baru

$$d\tau = -\frac{D(E)}{\xi \Sigma_s(E)} \cdot \frac{dE}{E} \tag{4.46}$$

Pers. (4.45) dapat ditulis sebagai

$$\nabla^2 q(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\partial q(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau} \tag{4.47}$$

di mana τ disebut dengan **umur Fermi**, yang didefinisikan sebagai

$$\tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{D(E')}{\xi \Sigma_s(E')} \frac{dE'}{E'} \tag{4.48}$$

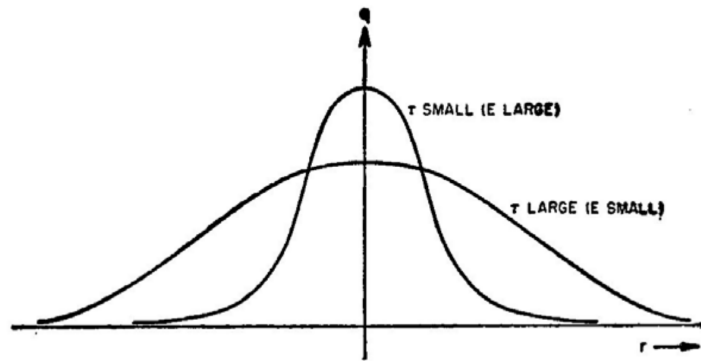
dengan E_0 menyatakan energi (rata-rata) neutron sumber.

Umur Fermi mempunyai dimensi (panjang)^2 sehingga untuk alasan ini disebut dengan **luasan moderasi** atau *moderation area*. Istilah *umur* mempunyai asal sejarah karena Pers. (4.47) analog dengan persamaan Fourier untuk perpindahan kalor non-stasioner, di mana waktu, t, diganti dengan τ di Pers. (4.47). Solusi dari Pers. (4.47) untuk berbagai geometri oleh karenanya dapat ditemukan di buku-buku teks tentang perpindahan kalor.

Untuk mengilustrasikan arti fisis dari τ, kita akan mengambil kasus sumber titik monoenergetik dengan kuat sumber S neutron/s di medium tak hingga besar. Solusi dari Pers. (4.47) dinyatakan dengan

$$q(\mathbf{r}, \tau) = \frac{S\, e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \tag{4.49}$$

(lihat juga Gambar 4.7)

Analog dengan cara yang menghubungkan antara panjang difusi, L, dengan jarak terpendek yang ditempuh oleh neutron monoenergetik sebelum diserap, kita dapat menghitung jarak kuadrat rata-rata yang ditempuh oleh neutron sebelum melewati energi E, atau dengan kata lain mencapai umur Fermi

Gambar 4.7. *Densitas perlambatan untuk sumber titik monoenergetik di medium homogen tak hingga besar menurut teori umur Fermi.*

$\tau(E)$:

$$\overline{r^2(\tau)} = \frac{1}{S}\int_0^\infty r^2\, 4\pi r^2 q(r,\tau)\, dr = 6\tau \tag{4.50}$$

yang analog dengan Pers. (2.33). Umur Fermi atau luasan moderasi dengan demikian dapat dianggap sebagai 1/6 kali dari jarak kuadrat rata-rata.

Sebenarnya terdapat perbedaan antara luasan moderasi yang didefinisikan dari Pers. (4.48) dengan luasan moderasi yang didefinisikan berdasar 1/6 dari jarak kuadrat rata-rata terpendek moderasi. Persamaan Fermi didasari pada asumsi perlambatan yang kontinyu, sementara definisi yang belakangan dapat diterapkan pada sistem yang realistis di mana proses moderasi terjadi dalam langkah-langkah diskret yang bisa saja cukup lebar intervalnya seperti pada moderator dengan nomor massa, A, yang rendah. Dengan alasan ini, maka pada literatur, nilai-nilai umur Fermi untuk moderator yang ditampilkan berdasarkan pada pengukuran atau perhitungan transport yang akurat. Tabel 4.4 memberikan beberapa nilai luasan moderasi yang ditentukan secara eksperimen untuk neutron fisi agar mencapai energi termal.

Tabel 4.4. *Umur Fermi untuk neutron fisi di beberapa material moderator.*

Moderator	umur dalam cm^2
Air ringan	33
Air berat	120
Berilium	98
Grafit	350

Umur Fermi berhubungan dengan jarak kuadrat rata-rata yang ditempuh oleh neutron ketika mengalami perlambatan. Akar dari umur ini dengan demikian disebut dengan *panjang perlambatan* atau *slowing-down length*. Untuk neutron termal dengan umur τ_{th}, nilai $\sqrt{\tau_{th}}$ merupakan ukuran vektor jarak netto (atau lintasan lurus) yang ditempuh oleh neutron semenjak terbentuk dari fisi sampai mereka mencapai energi termal.

Jumlahan dari kuadrat panjang difusi neutron termal (L_{th}^2) dengan umur Fermi disebut dengan *luas migrasi* atau *migration area* (M^2)

$$M^2 = L_{th}^2 + \tau \tag{4.51}$$

dan akarnya disebut dengan *panjang migrasi* atau *migration length*

$$M = \sqrt{L_{th}^2 + \tau} \tag{4.52}$$

4.3.1. Persamaan kritis dua kelompok

Persamaan kritis satu kelompok (Pers. (3.13)) merupakan pendekatan yang kasar karena berdasar anggapan bahwa produksi, serapan dan bocoran neutron berlangsung pada energi yang sama. Pada kenyataannya neutron dihasilkan dari reaksi fisi pada energi yang tinggi dan kemudian akan mengalami perlambatan menuju ke energi termal. Neutron bisa saja diserap, terutama oleh tangkapan resonansi, ketika berada pada rentang energi menengah atau epitermal. Pendekatan yang lebih bagus daripada model satu kelompok adalah pendekatan dua kelompoik di mana neutron dianggap berada pada salah satu dari dua kelompok energi, yaitu cepat atau termal. Meskipun dengan pendekatan dua kelompok ini, tidak ada neutron yang berada pada rentang energi epitermal, akan tetapi dimungkinkan adanya serapan resonansi yang ekivalen. Dengan demikian tidak semua neutron yang meninggalkan kelompok cepat akan masuk ke kelompok termal karena ada sebagian yang hilang karena tangkapan non-fisi.

Pada kondisi kritis persamaan difusi untuk kelompok cepat dapat dinyatakan dengan

$$D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + S_1 = 0 \tag{4.53}$$

dengan subskrip 1 menyatakan neutron cepat.

Suku sumber S_1 dapat diturunkan sebagai berikut. Untuk rekator termal, faktor perlipatan tak hingga k_∞ adalah rasio antara banyaknya neutron termal yang dihasilkan pada suatu generasi dibandingkan dengan banyaknya neutron yang diserap pada generasi sebelumnya pada sistem yang sangat besar. Oleh karena itu tidak neutron yang hilang akibat bocoran, akan tetapi beberapa neutron bisa saja hilang karena tangkapan resonansi ketika mengalami perlambatan. Konsekuensinya, untuk setiap neutron termal yang diserap, terdapat k_∞/p neutron cepat yang harus dihasilkan dari reaksi fisi agar k_∞ neutron mencapai energi termal (p adalah probabilitas lolos resonansi). Banyaknya neutron termal/m^3.s yang diserap adalah $\Sigma_2\phi_2$, di mana subskrip 2 menyatakan energi termal. Oleh karena itu, suku sumber neutron cepat adalah $(k_\infty/p)\Sigma_2\phi_2$. Pers. (4.53) kemudian dapat dituliskan menjadi

$$D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + \frac{k_\infty}{p} \Sigma_2 \phi_2 = 0 \tag{4.54}$$

Pada persamaan ini, Σ_2 adalah tampang lintang serapan makroskopik untuk neutron termal, akan tetapi Σ_1 adalah tampang lintang serapan semu. Aslinya adalah tampang lintang untuk memindahkan neutron dari grup cepat ke grup termal akibat perlambatan. Jika tidak ada tangkapan resonansi, $\Sigma_1\phi_1$ menyatakan laju di mana neutron cepat akan ditransfer ke kelompok energi termal. Akan tetapi karena adanya tangkapan resonansi, probabilitas neutron cepat akan menjadi termal adalah p, sehingga suku sumber neutron termal menjadi $p\Sigma_1\phi_1$.

Persamaan difusi untuk neutron termal pada sistem yang kritis dengan demikian dapat dituliskan sebagai

$$D_2\nabla^2\phi_2 - \Sigma_2\phi_2 + p\Sigma_1\phi_1 = 0 \tag{4.55}$$

Agar menndapatkan solusi dari Persamaan (4.54) dan (4.55), distribusi spasial fluks neutron cepat dan termal dapat dinyatakan melalui persamaan

$$\nabla^2\phi_1 + B^2\phi_1 = 0 \tag{4.56}$$

$$\nabla^2\phi_2 + B^2\phi_2 = 0 \tag{4.57}$$

dengan syarat batas yang sesuai. Karena B^2 hanya tergantung pada geometri sistem, maka nilainya sama besar untuk neutron termal maupun neutron cepat. Dengan mensubstitusi $\nabla^2\phi_1$ dan $\nabla^2\phi_2$ ke Pers. (4.54) dan (4.55), akan didapatkan

$$-(D_1B^2 + \Sigma_1)\phi_1 + \frac{k_\infty}{p}\Sigma_2\phi_2 = 0 \tag{4.58}$$

dan

$$p\Sigma_1\phi_1 - (D_2B^2 + \Sigma_2)\phi_2 = 0 \tag{4.59}$$

yang merupakan bentuk sistem persamaan linear.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut, dapat dicari nilai determinan dari koefisien-koefisiennya (ingat aturan Cramer), sebagai berikut

$$(D_1B^2 + \Sigma_1)(D_2B^2 + \Sigma_2) - k_\infty\Sigma_1\Sigma_2 = 0 \tag{4.60}$$

Jika persamaan di atas dibagi dengan $\Sigma_1\Sigma_2$ serta mensubstitusi $L_1^2 = D_1/\Sigma_1$ dan $L_{th}^2 = D_2/\Sigma_2$, maka akan diperoleh

$$\frac{k_\infty}{(1 + L_1^2B^2)(1 + L_{th}^2B^2)} = 1 \tag{4.61}$$

yang merupakan persamaan kritis untuk reaktor polos dengan pendekatan difusi dua grup energi.

4.3.2. Persamaan kritis perlambatan kontinyu

Pengembangan lebih lanjut dari model dua kelompok adalah dengan mengasumsikan neutron cepat (dan epitermal) dibagi menjadi beberapa kelompok energi yang dinyatakan dengan $1, 2, 3, \ldots, n$. Jika dianggap bahwa semua neutron pada kelompok cepat sembatang akan memasuki kelompok energi berikutnya yang lebih rendah, maka persamaan kritis dapat dituliskan sebagai

$$\frac{k_\infty}{(1 + L_1^2B^2)(1 + L_2^2B^2)(1 + L_3^2B^2)\cdots(1 + L_n^2B^2)(1 + L_{th}^2B^2)} = 1 \tag{4.62}$$

Jika banyaknya kelompok neutron cepat banyak sekali, maka perlambatan dari satu kelompok ke kelompok berikutnya sampai tercapai kelompok termal, secara fisis ekivalen dengan model perlambatan

kontinyu (CSDM). Pada kondisi semacam ini, jumlahan dari $L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_n^2$ menjadi identik dengan umur neutron termal,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} L_i^2 \equiv \tau \tag{4.63}$$

Dengan mengambil logaritma dari Pers. (4.62) didapatkan

$$\ln k_\infty = \ln \sum_{i=1}^{n} (1 + L_i^2 B^2) + \ln(1 + L_{th}^2 B^2) \tag{4.64}$$

Ketika $n \to \infty$, setiap L_i^2 menjadi sangat kecil dan nilai $\ln(1 + L_i^2 B^2)$ mendekati $L_i^2 B^2$, sehingga

$$\ln k_\infty = B^2 \sum_{i=1}^{n} L_i^2 + \ln(1 + L_{th}^2 B^2) \tag{4.65}$$

dan dengan menggunakan Pers. (4.63) menjadi

$$\ln k_\infty = \tau B^2 + \ln(1 + L_{th}^2 B^2) \tag{4.66}$$

Dengan demikian persamaan kritis berdasarkan CSDM menjadi

$$\frac{k_\infty e^{-\tau B^2}}{1 + L_{th}^2 B^2} = 1 \tag{4.67}$$

Persamaan di atas seringkali juga disebut dengan *age-diffusion critical equation* karena bisa diturunkan langsung dari persamaan umur Fermi (Persamaan 4.47).

Karena persamaan kritikalitas dapat dinyatakan sebagai

$$k_\infty P_{NL} = 1 = k_{eff} \tag{4.68}$$

dengan P_{NL} adalah probabilitas tidak bocor (*non-leakage probability*), maka dari Pers. (4.67) dapat ditentukan pula besarnya probabilitas tidak bocor, yaitu untuk energi termal sebesar

$$P_{th} = \frac{1}{1 + L_{th}^2 B^2} \tag{4.69}$$

dan untuk energi cepat sebesar

$$P_f = e^{-B^2 \tau} \tag{4.70}$$

dan

$$P_{NL} = P_f \times P_{th} \tag{4.71}$$

Untuk keperluan praktis, Pers. (4.67) seringkali disederhanakan. Karena nilai B^2 berbanding terbalik dengan ukuran reaktor, tampak bahwa untuk reaktor yang berukuran besar, nilai $e^{-\tau B^2}$ dapat diekspansi

menjadi bentuk deret dan semua suku di atas orde kedua dapat diabaikan, sehingga

$$e^{-\tau B^2} \approx 1 - \tau B^2 \approx \frac{1}{1+\tau B^2} \tag{4.72}$$

Pada kondisi semacam ini, persamaan kritis menjadi

$$\frac{k_\infty}{(1+\tau B^2)(1+L_{th}^2 B^2)} = 1 \tag{4.73}$$

atau

$$\frac{k_\infty}{(1+(\tau + L_{th}^2)B^2 + \tau L_{th}^2 B^4} = 1 \tag{4.74}$$

Jika suku B^4 dapat diabaikan karena nilainya akan kecil untuk reaktor yang besar, maka persamaan kritis menjadi

$$\frac{k_\infty}{1+B^2(L_{th}^2+\tau)} = 1 \tag{4.75}$$

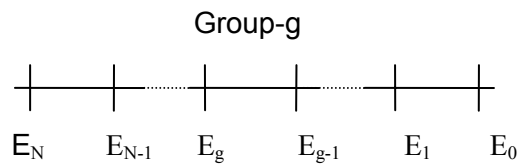
atau

$$\frac{k_\infty}{1+B^2 M^2} = 1 \tag{4.76}$$

4.4. Persamaan difusi banyak kelompok

Kita tuliskan kembali Pers. (4.1) untuk memudahkan pembahasan kita di sini.

$$\begin{aligned} \frac{1}{v}\frac{\partial \phi(\mathbf{r},E,t)}{\partial t} &= \nabla \cdot D(\mathbf{r},E)\nabla\phi(\mathbf{r},E,t) - \Sigma_t(\mathbf{r},E)\phi(\mathbf{r},E,t) \\ &+ S(\mathbf{r},E,t) + \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r},E' \to E)\phi(\mathbf{r},E',t)dE' \end{aligned} \tag{4.77}$$

Dikarenakan rentang energi neutron sangat lebar (dengan orde 10^{-4} eV sampai 10 MeV) dan tampang lintang mikroskopik menunjukkan puncak-puncak resonansi yang tajam, agar dapat dilakukan perhitungan diperlukan diskretisasi rentang energi dan mengelompokkannya menjadi beberapa kelompok energi. Gambar 4.8 menunjukkan pembagian kelompok energi. Karena neutron dihasilkan dari reaksi fisi dengan energi yang tinggi dan kehilangan energi akibat moderasi, kelompok-kelompok tersebut kemudian biasanya diberi nomor dari energi tinggi ke energi rendah.

Gambar 4.8. *Pembagian kelompok energi.*

Untuk energi grup g dapat didefinisikan fluks grup ϕ_g sebagai

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E, t)\, dE = \int_g \phi(\mathbf{r}, E, t)\, dE \tag{4.78}$$

Dengan mengintegralkan Pers. (4.1) terhadap interval energi grup g, kita dapatkan persamaan difusi multigrup yang terkopel sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g}\frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{tg}(\mathbf{r})\phi_g(\mathbf{r}, t) \\ &+ S_g(\mathbf{r}, t) + \sum_{g'} \Sigma_{g'g}(\mathbf{r})\phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \tag{4.79}$$

Jika fisi terjadi pada sistem, sumber pada grup g dinyatakan dengan

$$S_g(\mathbf{r}, t) = \chi_g \sum_{g'} \nu_{g'}\sigma_{fg'}(\mathbf{r})\phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_{g,ext}(\mathbf{r}, t) \tag{4.80}$$

Di sini χ_g adalah fraksi neutron dengan energi pada grup g yang dilepaskan selama fisi yang dinyatakan sebagai

$$\chi_g = \int_g \chi(E)\, dE \tag{4.81}$$

dan $S_{g,ext}$ adalah sumber eksternal. Pada Pers. (4.79) digunakan definisi sebagai berikut

$$\Sigma_{tg} = \frac{1}{\phi_g}\int_g \Sigma_t(E)\phi(\mathbf{r}, E, t)\, dE \tag{4.82}$$

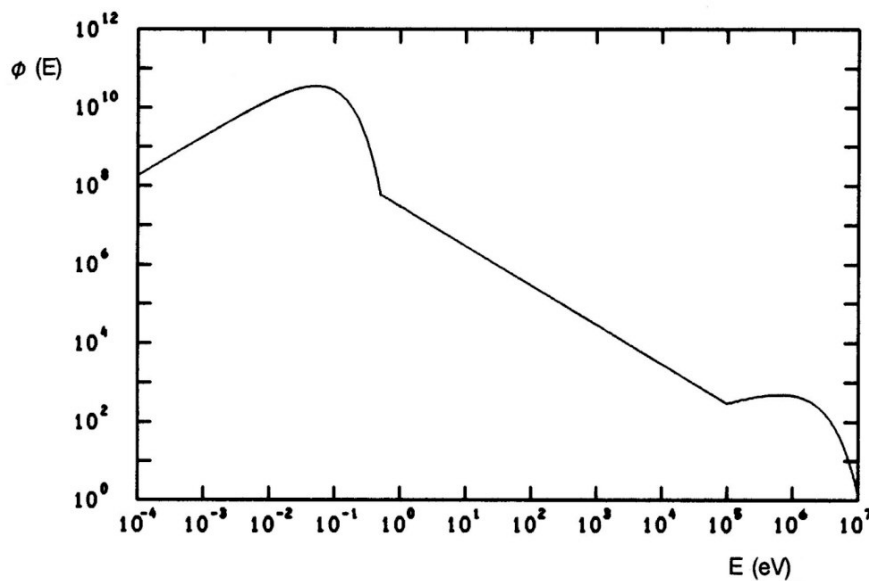
$$D_g = \frac{\displaystyle\int_g D(E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E, t)\, dE}{\displaystyle\int_g \nabla\phi(\mathbf{r}, E, t)\, dE} \tag{4.83}$$

$$\Sigma_{g'g} = \frac{1}{\phi_{g'}}\int_g\int_{g'} \Sigma_s(E' \to E)\phi(\mathbf{r}, E', t)\, dE' dE \tag{4.84}$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{\phi_g}\int_g \frac{1}{v}\phi(\mathbf{r}, E, t)\, dE \tag{4.85}$$

Persamaan (4.81)–(4.85) disebut dengan **konstanta grup**. Definisi tersebut hanya bersifat formal karena untuk menggunakannya fluks neutron $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ dalam grup g harus diketahui, padahal Pers. (4.79) justru dimaksudkan untuk mencari fluks grup g. Agar konstanta grup tersebut masih dapat digunakan, kita perlu mencari nilai pendekatan untuk fluks. Fluks ini diasumsikan dapat dipisahkan menjadi bagian yang gayut posisi dan waktu di satu sisi dan bagian yang gayut energi di sisi yang lain.

4.5. Perhitungan konstanta grup

Berdasarkan pertimbangan yang telah dijelaskan pada bagian sebelum ini, kita sekarang dapat membuat representasi global spektrum neutron untuk reaktor termal pada semua enegi. Pada daerah cepat (di atas 100 keV), bentuk spektrum akan menyerupai spektrum fisi. Pada daerah epitermal, spektrum akan menunjukkan perilaku $1/E$ (kecuali untuk resonansi) dan pada daerah termal (di bawah 0,5 eV) akan sesuai dengan distribusi Maxwell-Boltzmann. Spektrum semacam ini ditunjukkan secara skematis pada Gambar 4.9.

Gambar 4.9. *Spektrum fluks pada reaktor termal.*

Spektrum semacam ini biasa digunakan sebagai spektrum pererataan (*averaging spectrum*) untuk perhitungan konstanta grup sesuai dengan Pers. (4.81)–(4.85). Jika hal ini dilakukan untuk banyak kelompok (sekitar 200), deviasi dari spektrum aktual di dalam kelompok akan kecil.

Setelah itu, kita dapat melakukan perhitungan difusi multigrup dengan geometri reaktor yang sebenarnya. Dengan jumlah kelompok energi yang banyak, hal ini sulit dilakukan. Oleh karenanya, kita perlu melakukan "kondensasi" kelompok energi, yaitu menggabungkan kelompok-kelompok energi menjadi sejumlah kelompok yang lebih lebar. Tampang lintang untuk kelompok-kelompok yang lebar kemudian dihitung menggunakan spektrum neutron yang diperoleh dari perhitungan kelompok-kelompok halus, akan tetapi dengan representasi geometri yang disederhanakan, misalnya dengan menganggap geometri satu dimensi.

Jika fluks kelompok halus dinyatakan dengan ϕ_i, tampang lintang mikroskopik σ_{xg} untuk reaksi jenis x (misal absorpsi) dan untuk kelompok lebar g yang terdiri dari kelompok halus n_{g1} sampai dengan n_{g2}

dapat dihitung dari

$$\sigma_{xg} = \frac{\sum_{n_{g1}}^{n_{g2}} \sigma_{xi}\phi_i}{\sum_{n_{g1}}^{n_{g2}} \phi_i} \tag{4.86}$$

Dengan tampang lintang grup lebar yang diperoleh dengan cara ini, kita kemudian dapat melakukan perhitungan reaktor dengan representasi geometri yang lebih realistis. Akan tetapi, seringkali diperlukan langkah tambahan karena geometri teras reaktor yang sangat heterogen yaitu dengan adanya banyak batang bakar dengan kelongsong dan dikelilingi oleh pendingin atau moderator dan dengan tambahan material struktur dan batang kendali.

Untuk teras reaktor homogen yang besar (yaitu besar terhadap perlambatan dan/atau panjang difusi neutron), di mana spektrum neutron di bagian terbesar dari teras tidak gayut terhadap posisi, kita mendapatkan sebuah metode yang masih dapat diterapkan dengan baik untuk menghitung tampang lintang grup lebar. Spektrum merupakan karakteristik dari komposisi teras dan disebut dengan "spektrum kesetimbangan". Ketidakgayutan spasial spektrum ini menunjukkan bahwa semua kelompok (halus) memenuhi persamaan

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \tag{4.87}$$

dengan B^2 adalah faktor *buckling* yang tergantung kepada dimensi teras. Kita dapat menggantikan suku $D_g\nabla^2\phi_g$ dalam persamaan difusi dengan $-D_gB^2\phi_g$ untuk masing-masing grup. Dengan cara ini kita peroleh sistem persamaan linear yang dapat diselesaikan secara iterasi. Perhitungan semacam ini sering kali dikenal dengan perhitungan "setengah dimensi", karena kegayutan terahdap ruang tidak diperhitungkan secara eksplisit, tetapi bocoran neutron masih diperhitungkan.

Sistem persamaan difusi multigrup (Pers. (4.79)) untuk problem nilai diri (*eigenvalue*) dapat dituliskan dalam bentuk

$$D_gB^2\phi_g + \Sigma_{Rg}\phi_g - \frac{\chi_g}{k}\sum_{g'}^{G}\nu_{g'}\Sigma_{fg'}\phi_{g'} - \sum_{g'\neq g}^{G}\Sigma_{g'g}\phi_{g'} = 0 \tag{4.88}$$

dengan G adalah banyaknya grup dan Σ_{Rg} adalah tampang lintang ambilan (*removal*) untuk grup g

$$\Sigma_{Rg} = \Sigma_{ag} + \sum_{g'\neq g}^{G}\Sigma_{gg'} = \Sigma_{tg} - \Sigma_{gg} \tag{4.89}$$

4.6. Perlakuan terhadap resonansi

Metode perhitungan tampang lintang grup halus dengan asumsi spektrum fluks $\phi(E)$ proporsional terhadap $1/E$ di daerah energi epitermal sebagaimana dijabarkan di bagian sebelumnya tidak dapat diterapkan untuk resonansi tampang lintang mikroskopik karena fluks neutron akan mengalami deviasi yang signifikan dari perilaku $1/E$.

Di reaktor termal, selain terdapat bahan bakar nuklir juga terdapat moderator. Jika kita anggap bahan bakar dan moderator tercampur secara homogen, persamaan untuk fluks dengan mengembangkan Pers.

(4.33) menjadi

$$\left(\Sigma_a^F(E) + \Sigma_s^F + \Sigma_s^M\right)\phi(E) = \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F \phi(E')}{E'(1-\alpha_F)}\,dE' + \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M \phi(E')}{E'(1-\alpha_M)}\,dE' \tag{4.90}$$

Di suku sebelah kiri sudah ditambahkan serapan di bahan bakar (superskrip F) sementara di suku sebelah kanan terdapat penjumlahan dari kontribusi moderasi bahan bakar dan moderator. Tampang lintang hamburan dianggap tidak gayut terhadap energi (hanya ada hamburan potensial di bahan bakar). Jika energi E berada pada daerah resonansi dan lebar resonansi relatif kecil terhadap rentang energi berlangsungnya hamburan (pendekatan "*narrow resonance*"), maka kita dapat mengeset fluks di dalam integral di suku sebelah kanan sama dengan fluks yang berlaku di energi di atas resonansi, di mana serapan dapat diabaikan. Di daerah tersebut fluks sebanding dengan $1/E$ sesuai dengan Pers. (4.36). Dengan demikian, fluks neutron per satuan letargi, yang didefinisikan di Pers. (4.22), adalah konstan di luar rentang resonansi

$$\phi_{br}(u) = \phi_{br}(E)\left|\frac{dE}{du}\right| = E\phi_{br}(E) = \phi_u \tag{4.91}$$

Substitusi Pers. (4.91) menghasilkan

$$\phi(E) = \frac{\phi_u \Sigma_0/E}{\Sigma_a(E) + \Sigma_0} = \frac{\phi_u}{1 + \Sigma_a(E)/\Sigma_0}\frac{1}{E} \tag{4.92}$$

untuk fluks di resonansi. Di sini $\Sigma_0 = \Sigma_s^M + \Sigma_s^F$ adalah tampang lintang hamburan makroskopik total.

Serapan di resonansi menjadi

$$\int \Sigma_a(E)\phi(E)\,dE = \int \frac{\Sigma_a(E)\phi_u}{1 + \Sigma_a(E)/\Sigma_0}\frac{dE}{E} = N^F\phi_u \int \frac{\sigma_a(E)}{1 + \sigma_a(E)/\sigma_0}\frac{dE}{E} \tag{4.93}$$

Di sini σ_0 adalah tampang lintang mikroskopis fiktif yang sama dengan tampang lintang hamburan (potensial) total *per atom bahan bakar*. Integrasi Pers. (4.93) harus dilakukan untuk interval lebar resonansi. Untuk menentukan tampang lintang grup untuk serapan, kontribusi dari semua resonansi di dalam grup tersebut harus dijumlahkan. Hal ini berarti bahwa integral di Pers. (4.93) dapat dilakukan untuk keseluruhan rentang energi grup, karena tampang lintang serapan di luar resonansi dapat diabaikan karena kecil. Integral semacam itu disebut dengan **integral resonansi** atau *resonance integral* dan merupakan tampang lintang mikroskopik efektif. Jika besaran ini dikalikan dengan fluks neutron per satuan letargi yang ada tanpa serapan akan memberikan laju serapan yang sesungguhnya. Integral resonansi tergantung pada "lingkungan sekitarnya" di mana bahan bakar berada karena adanya σ_0. Nilai integral resonansi biasanya dihitung secara numerik untuk sejumlah nilai σ_0 dengan mensubstitusi persamaan Breit-Wigner (1.14) untuk tampang lintang serapan resonansi. Jika σ_0 sangat besar, maka fluks $1/E$ tetap valid di resonansi dan kita mnyebutnya sebagai ***infinitely diluted resonance integral***. Pada kasus yang lain terjadi *self-shielding*, sehingga fluks di resonansi menjadi lebih rendah karena keberadaan material penyerap dan serapan di bahan bakar menjadi lebih sedikit. Ini akan kita bahas lebih lanjut nanti di Bab 5.

4.7. Sistem persamaan untuk dua grup

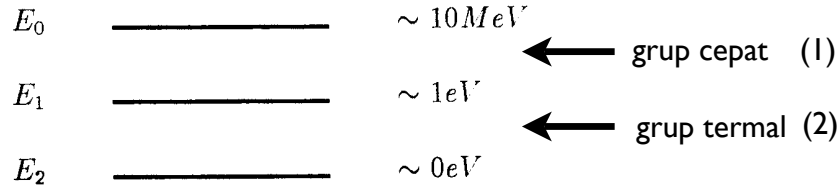
Sebagai ilustrasi kita akan melihat sistem persamaan untuk dua grup neutron. Di sini spektrum neutron dibedakan menjadi dua, yaitu grup neutron cepat dan grup neutron termal seperti ditampilkan pada Gambar 4.10.

E_0 ——— $\sim 10MeV$

grup cepat (1)

E_1 ——— $\sim 1eV$

grup termal (2)

E_2 ——— $\sim 0eV$

Gambar 4.10. *Pembagian energi untuk sistem dua grup.*

Fluks cepat dan termal didefinisikan sebagai

$$\phi_1 = \int_{E_1}^{E_0} \phi(E)dE \tag{4.94}$$

$$\phi_2 = \int_{E_2}^{E_1} \phi(E)dE \tag{4.95}$$

Sumber netron fisi dinyatakan dengan

$$S_{f1} = \nu_1 \Sigma_{f1}\phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2}\phi_2 \tag{4.96}$$

$$S_{f2} = 0 \tag{4.97}$$

karena

$$\chi_1 = \int_{E_1}^{E_0} \chi(E)dE = 1 \tag{4.98}$$

$$\chi_2 = \int_{E_2}^{E_1} \chi(E)dE = 0 \tag{4.99}$$

Diasumsikan bahwa tidak ada hamburan dari grup termal menuju ke grup cepat (dengan kata lain, tidak terdapat *upscattering*), sehingga berlaku

$$\int_{E_2}^{E_1} \Sigma_s(E' \to E)dE = \Sigma_s(E') \tag{4.100}$$

Dengan demikian hamburan di dalam grup termal (*self-scattering*) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \Sigma_{s22} &= \frac{1}{\phi_2}\int_{E_2}^{E_1} dE \int_{E_2}^{E_1} \Sigma_s(E' \to E)\phi(E')dE' \\ &= \frac{1}{\phi_2}\int_{E_2}^{E_1} \Sigma_s(E')\phi(E')dE' = \Sigma_{s2} \end{aligned} \tag{4.101}$$

Tampang lintang ambilan untuk kelompok termal kemudian dapat dinyatakan dengan

$$\Sigma_{R2} = \Sigma_{t2} - \Sigma_{s22} = \Sigma_{t2} - \Sigma_{s2} = \Sigma_{a2} \tag{4.102}$$

Persamaan difusi untuk grup cepat dan grup termal dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} D_1 B^2 \phi_1 + \Sigma_{R1}\phi_1 &= \frac{1}{k}\left(\nu_1 \Sigma_{f1}\phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2}\phi_2\right) \\ D_2 B^2 \phi_2 + \Sigma_{a2}\phi_2 &= \Sigma_{s12}\phi_1 \end{aligned} \tag{4.103}$$

Dengan memindahkan suku-suku yang bersesuaian, Pers. (4.103) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \left(D_1 B^2 + \Sigma_{R1} - \frac{1}{k}\nu_1 \Sigma_{f1}\right)\phi_1 - \frac{1}{k}\nu_2 \Sigma_{f2}\phi_2 &= 0 \\ -\Sigma_{s12}\phi_1 + \left(D_2 B^2 + \Sigma_{a2}\right)\phi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.104}$$

Sistem persamaan yang mengandung variabel ϕ_1 dan ϕ_2 tersebut mempunyai penyelesaian yang non-trivial apabila koefisien dari sistem persamaan

$$\begin{aligned} a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 &= 0 \\ a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.105}$$

memenuhi syarat determinan

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0 \tag{4.106}$$

Dengan demikian berlaku

$$\left(D_1 B^2 + \Sigma_{R1} - \frac{\nu_1 \Sigma_{f1}}{k}\right)\left(D_2 B^2 + \Sigma_{a2}\right) - \frac{\nu_2 \Sigma_{f2}\Sigma_{s12}}{k} = 0 \tag{4.107}$$

Penyelesaian untuk faktor perlipatan, k, dapat dinyatakan dengan

$$k = \frac{\nu_1 \Sigma_{f1}}{D_1 B^2 + \Sigma_{R1}} + \frac{\Sigma_{s12}}{D_1 B^2 + \Sigma_{R1}} \cdot \frac{\nu_2 \Sigma_{f2}}{D_2 B^2 + \Sigma_{a2}} \tag{4.108}$$

Persamaan (4.108) dapat dibandingkan dengan rumus 6 faktor untuk mendeskripsikan sistem kritis. Suku pertama dari persamaan tersebut menyatakan multiplikasi neutron yang disebabkan dari reaksi fisi pada kelompok cepat dan suku kedua menyatakan multiplikasi neutron akibat fisi di grup termal. Untuk reaktor termal, suku kedua dari persamaan tersebut lebih dominan.

Kita tulis kembali rumus 6 faktor sebagai berikut

$$k = \epsilon \; p \; f \; \eta \; P_f \; P_{th} \tag{4.109}$$

Selanjutnya nilai faktor multiplikasi kita urai, $k = k_1 + k_2$ sehingga untuk k_2 dapat dituliskan sebagai

$$k_2 = \frac{\Sigma_{s12}}{D_1 B^2 + \Sigma_{R1}} \cdot \frac{\nu_2 \Sigma_{f2}}{D_2 B^2 + \Sigma_{a2}} \tag{4.110}$$

Dengan menuliskan panjang difusi sebagai berikut

$$L_1^2 = \frac{D_1}{\Sigma_{R1}}, \qquad L_2^2 = \frac{D_2}{\Sigma_{a2}}$$

kita dapatkan nilai k_2 sebagai berikut

$$k_2 = \frac{\Sigma_{s12}}{\Sigma_{R1}} \left(\frac{1}{1 + L_1^2 B^2} \right) \nu_2 \left(\frac{\Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}} \right) \left(\frac{1}{1 + L_2^2 B^2} \right) \tag{4.111}$$

atau

$$k_2 = p\, P_f\, \eta_2\, f_2\, P_{th} \tag{4.112}$$

Selanjutnya untuk k_1 dapat kita tuliskan sebagai

$$k_1 = \nu_1 \left(\frac{\Sigma_{f1}}{\Sigma_{R1}} \right) \left(\frac{1}{1 + L_1^2 B^2} \right) = \eta_1\, f_1\, P_f \tag{4.113}$$

Faktor fisi cepat dapat dituliskan sebagai berikut

$$\epsilon = \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) = \left(1 + \frac{\nu_1 \Sigma_{f1}}{\nu_2 \Sigma_{f2}} \frac{\Sigma_{a2} + D_2 B^2}{\Sigma_{s12}} \right) \tag{4.114}$$

sehingga terpenuhi

$$k = k_1 + k_2 = \epsilon\, k_2 = \epsilon\, p\, \eta_2\, f_2\, P_f\, P_{th} \tag{4.115}$$

Dengan demikian kita dapat mencari besarnya ϕ_1 dan ϕ_2 setelah nilai k diketahui.

4.8. Penyelesaian persamaan multigrup secara berurutan

Rentang energi neutron dibagi menjadi G grup dan salah satu penyelesaiannya adalah secara berurutan. Grup 1 merupakan energi yang tertinggi, G adalah energi yang terendah. Dengan konstanta perlipatan k berlaku pesamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 + \Sigma_{R1} \phi_1 &= \frac{1}{k} \chi_1 S \\
-\nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 + \Sigma_{R2} \phi_2 &= \frac{1}{k} \chi_2 S + \Sigma_{s12} \phi_1 \\
-\nabla \cdot D_3 \nabla \phi_3 + \Sigma_{R3} \phi_3 &= \frac{1}{k} \chi_3 S + \Sigma_{s13} \phi_1 + \Sigma_{s23} \phi_2 \\
&\vdots \\
-\nabla \cdot D_G \nabla \phi_G + \Sigma_{RG} \phi_G &= \frac{1}{k} \chi_G S + \Sigma_{s1G} \phi_1 + \ldots + \Sigma_{sG-1,G}\, \phi_{G-1}
\end{aligned} \tag{4.116}$$

Sumber neutron fisi dinyatakan sebagai

$$S(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}(\mathbf{r}) \tag{4.117}$$

Untuk menyelesaikan persamaan difusi ini terlebih dahulu kita tentukan nilai awal sumber fisi, $S(\mathbf{r})$, dan faktor perlipatan, k

$$S(\mathbf{r}) \approx S^{(0)}(\mathbf{r}) \tag{4.118}$$

$$k \approx k^{(0)} \tag{4.119}$$

Dengan demikian fluks neutron pada grup pertama dapat ditentukan

$$-\nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1^{(1)} + \Sigma_{R1} \phi_1^{(1)} = \frac{1}{k^{(0)}} \chi_1 S^{(0)}(\mathbf{r}) \tag{4.120}$$

Untuk grup kedua, persamaan difusi dituliskan sebagai

$$-\nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2^{(1)} + \Sigma_{R2} \phi_2^{(1)} = \frac{1}{k^{(0)}} \chi_2 S^{(0)}(\mathbf{r}) + \Sigma_{s12} \phi_1^{(1)} \tag{4.121}$$

Dengan diketahui suku sebelah kanan, persamaan diferensial untuk nilai $\phi_2^{(1)}$ dapat diselesaikan. Dengan cara yang sama fluks grup yang lain pada iterasi pertama dapat diketahui

$$\phi_3^{(1)}(\mathbf{r}), \ldots, \phi_G^{(1)}(\mathbf{r})$$

Ketika iterasi pertama sudah selesai dilakukan, sumber neutron yang baru dapat ditentukan

$$S^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}^{(1)}(\mathbf{r}) \tag{4.122}$$

dan faktor perlipatan yang baru dapat dihitung

$$k^{(1)} = \frac{S^{(1)}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}}{\frac{1}{k} \int S^{(0)}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}} \tag{4.123}$$

Proses perhitungan diulangi lagi sampai iterasi menuju kepada nilai yang konvergen.

4.9. Penyelesaian secara numeris

4.9.1. Penyelesaian Persamaan Difusi Multigrup

Kita akan menyelesaian persamaan difusi dengan mencari apa yang biasa disebut sebagai *lambda mode eigenvalue*. Struktur umum dari persamaan difusi multigrup yang telah didiskretisasi dengan beda hingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left[\Sigma_{r_i}^g + \sum_j^J \frac{D_{ij}^g}{\Delta_{ij}^2} \right] \phi_i^g - \sum_j^J \frac{D_{ij}^g}{\Delta_{ij}^g} \phi_j^g = \lambda \chi^g \sum_{g'=1}^{G} \nu^{g'} \Sigma_{f_i}^{g'} \phi_i^{g'} + \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s_i}^{g' \to g} \phi^{ig'} \tag{4.124}$$

Catatan:

- Kita menggunakan indeks grup *g* sebagai superscript dan indeks mesh spasial *i* dan *j* sebagai subscript.
- $j = 1, \ldots, J$, dengan J = 2, 4, atau 6 untuk geometri kartesian 1, 2 atau 3 dimensi. *j* menyatakan titik mesh tetangga yang bersebelahan.
- Untuk geometri silinder dan bola, Pers. (4.124) perlu disesuaikan.
- Nilai koefisien difusi dinyatakan sebagai

$$D_{ij} \equiv \frac{1}{2} (D_i + D_j) \tag{4.125}$$

- λ merupakan eigenvalue, di mana $\lambda = \dfrac{1}{k_{eff}}$

Pers. (4.124) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

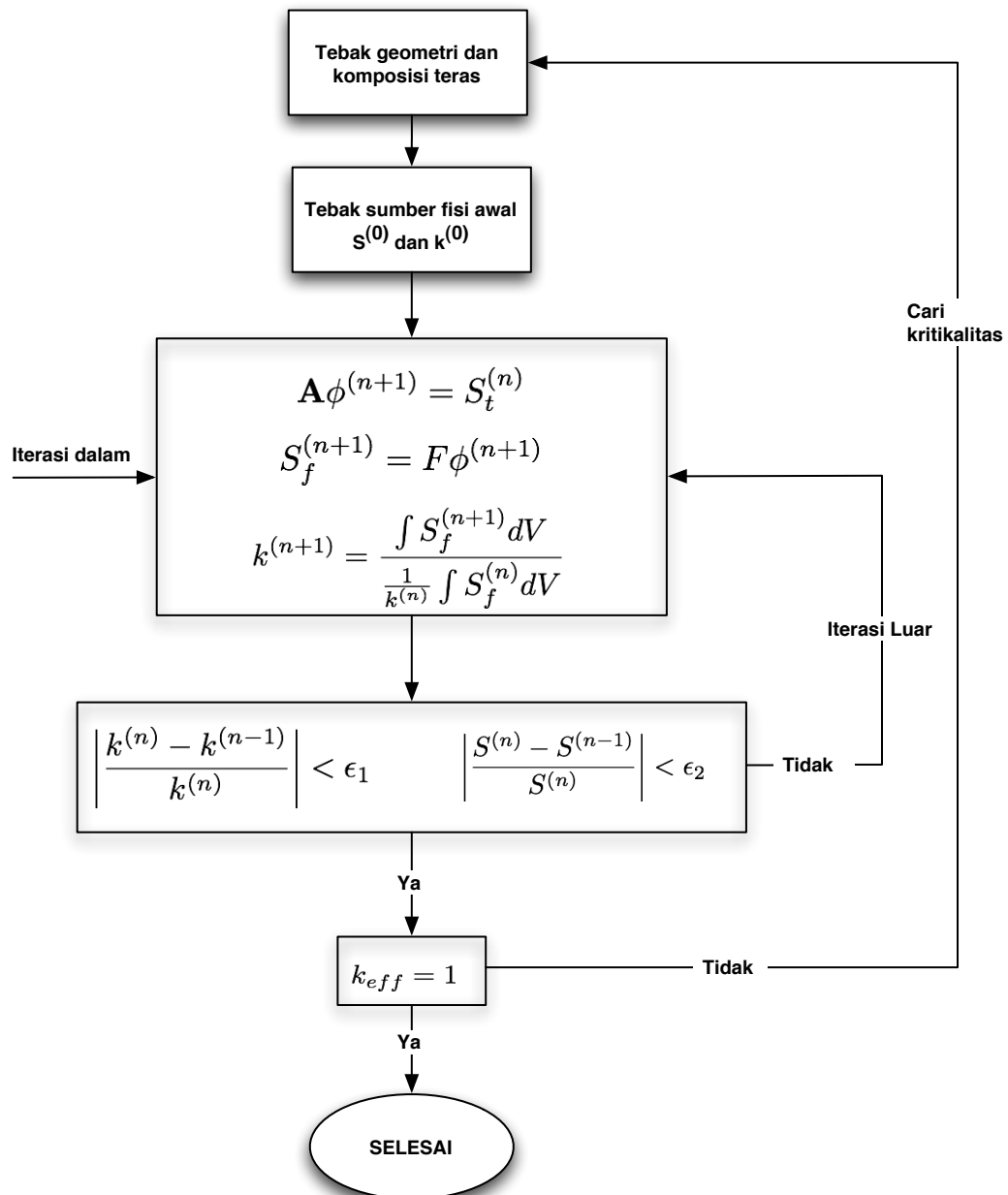
$$\mathbf{A}_g \Phi_g = S_{tg} \tag{4.126}$$

Penyelesaian persamaan multigrup terdiri dari dua langkah yang berbeda. Langkah pertama adalah mencari penyelesaian terhadap Pers. (4.126) untuk nilai fluks neutron pada setiap titik mesh untuk masing-masing kelompok energi. Secara teori, penyelesaian Pers. (4.126) dapat dilakukan dengan jalan mencari invers dari matriks $\mathbf{A}_g$,

$$\Phi_g = \mathbf{A}_g^{-1} S_{tg} \tag{4.127}$$

akan tetapi hal ini dalam prakteknya sulit dilakukan misalnya karena ukuran dari matriks tersebut. Oleh karenanya biasanya dilakukan penyelesain secara iteratif. Langkah ini (dalam bidang desain reaktor nuklir) biasa disebut dengan istilah *iterasi dalam* (*inner iteration*).

Langkah yang kedua adalah menyelesaian permasalahan eigenvalue untuk mendapatkan faktor kritikalitas, k, dengan nilai fluks spasial yang sudah konvergen. Perhitungan ini juga melibatkan metode iterasi di mana distribusi sumber neutron yang baru ditentukan berdasarkan nilai yang lama. Karena untuk melakukan iterasi sumber ini perlu dilakukan beberapa kali iterasi dalam agar konvergen, langkah ini kemudian disebut sebagai *iterasi luar* (*outer iteration*).

Secara umum strategi perhitungan untuk menyelesaikan persamaan difusi multigrup ini dapat dilihat pada Gambar 4.11. Perhatikan bahwa penyelesaian persamaan matriks $\mathbf{A}\phi = S$ dilakukan untuk setiap grup energi.

Gambar 4.11. *Diagram alir untuk perhitungan kritikalitas reaktor*

LATIHAN

1. Sebuah reaktor daya didinginkan oleh air berat (D_2O) akan tetapi terjadi kebocoran yang menyebabkan kontaminasi 1% atom pendingin air ringan (H_2O). Tentukan berapa persen kenaikan atau penurunan karakteristik pendingin berikut ini:

   (a) slowing down power

   (b) slowing down ratio

2. Faktor multiplikasi tak hingga dari kisi heterogen bahan bakar uranium alam yang berada pada moderator air berat (D_2O) adalah sebesar 1,28. Pada kisi tersebut, diketahui L_{th}^2 sebesar 1,84$\times 10^{-2}$ m^2 dan τ sebesar 1,20$\times 10^{-2}$ m^2. Tentukan *buckling* kritis material menggunakan :

   (a) Pers. (4.76)

   (b) Pers. (4.73)

   (c) Pers. (4.67)

3. Hitung probabilitas tidak bocor neutron ketika mengalami perlambatan dan ketika berada pada energi termal untuk reaktor seperti pada Latihan nomor 2.

4. Diketahui data tampang lintang dua grup untuk perangkat bahan bakar adalah sebagai berikut:

Grup	$\Sigma_s^{1\to 2}$	Σ_a	$\nu\Sigma_f$
Grup 1	$\Sigma_s^{1\to 2} = 0,0241$ cm^{-1}	$\Sigma_{a1} = 0,0121$ cm^{-1}	$\nu\Sigma_{f1} = 0,0085$
Grup 2		$\Sigma_{a2} = 0,121$ cm^{-1}	$\nu\Sigma_{f2} = 0,185$

   Diasumsikan reaktor berukuran tak hingga besarnya.Di samping itu semua neutron fisi dihasilkan pada grup cepat dan tidak ada *upscattering* dari grup termal ke grup cepat.

   (a) Tuliskan persamaan difusi dua grup untuk sistem di atas pada keadaan *steady state*.

   (b) Tentukan besarnya rasio fluks cepat terhadap fluks termal.

   (c) Tentukan besarnya nilai faktor multiplikasi.

   (d) Tentukan nilai tampang lintang absorbsi dan $\nu\Sigma_f$ setelah dilakukan *collapsing* dari dua grup menjadi satu grup.

5. Tuliskan persamaan difusi multigrup untuk kasus berikut ini:

   Reaktor berhingga besarnya dan *steady state*, 5 grup energi, *upscattering* terjadi pada dua grup energi terendah, tidak ada neutron fisi yang dilahirkan pada 3 grup energi terendah, fisi hanya terjadi pada grup energi terendah.

Bab 5

Reaktor Heterogen

Before I came here I was confused
about this subject. Having listened
to your lecture I am still confused.
But on a higher level.

ENRICO FERMI

Learning outcomes :

- Mampu menjelaskan pengertian *self-shielding*, faktor rugi termal, faktor penggunaan termal dan probabilitas lolos resonansi.
- Mampu menghitung faktor rugi termal dan probabilitas lolos resonansi dengan berbagai metode.
- Mampu mengidentifikasi pengaruh heterogenitas material di dalam teras terhadap parameter neutronika.

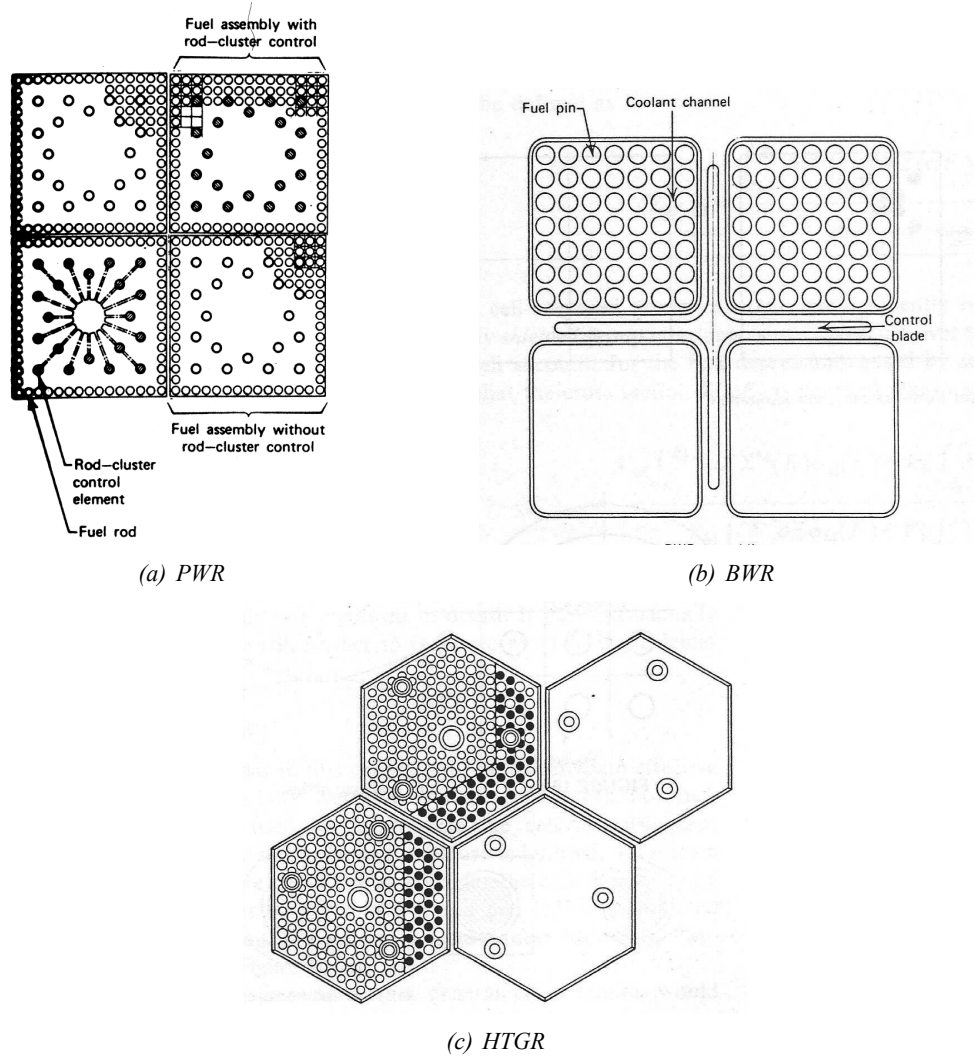
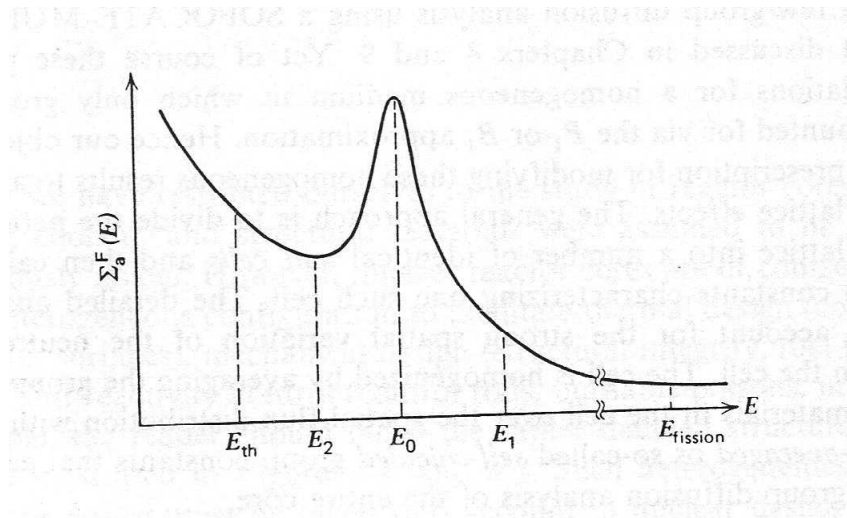
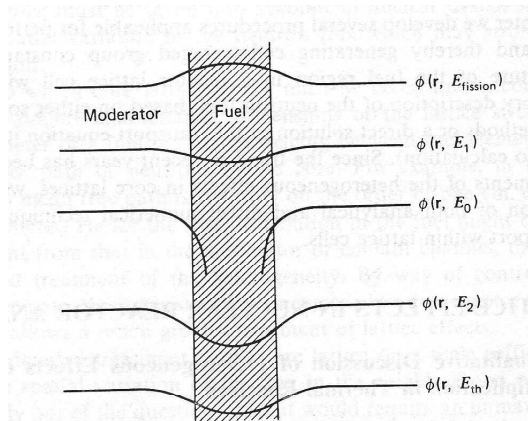
Minggu ke : 6 dan 7

SELAMA ini pembahasan mengenai reaktor dilakukan untuk campuran homogen yang berarti bahwa bahan bakar dianggap dicampur dengan bahan yang lain seperti moderator. Karena reaktor yang dianalisis dianggap homogen maka fluks neutron ditentukan tanpa memperhatikan struktur teras yang heterogen.Pada kenyataannya struktur teras reaktor bersifat heterogen. Gambar 5.1 menampilkan konfigurasi perangkat bahan bakar (*fuel assembly*) beberapa jenis reaktor daya.

Parameter yang menyatakan tingkat heterogenitas adalah dimensi bahan bakar dan panjang lintasan neutron di bahan bakar. Sebuah reaktor dikatakan *heterogen* apabila panjang lintasan bebas rerata (*mean free path*) neutron bernilai **hampir sama** atau **lebih kecil** daripada dimensi karakteristik (tebal atau jari-

(a) PWR

(b) BWR

(c) HTGR

Gambar 5.1. *Susunan perangkat bahan bakar beberapa jenis reaktor daya.*

Gambar 5.2. *Tampang lintang serapan bahan bakar di daerah energi resonansi.*

Gambar 5.3. *Distribusi fluks neutron di bahan bakar pada beberapa tingkat energi.*

jari) elemen bahan bakar. Dalam hal ini banyak tumbukan neutron terjadi di dalam bahan bakar, sehingga distribusi fluks neutron di moderator dan bahan bakar akan sangat berbeda. Hal ini membuat analisis untuk reaktor heterogen lebih kompleks daripada reaktor homogen karena analisis di daerah bahan bakar harus dilakukan terpisah dari bahan moderator.

Gambar 5.2 menunjukkan tampang lintang serapan neutron pada bahan bakar sebagai fungsi dari energi neutron dan Gambar 5.3 menunjukkan distribusi fluks neutron di bahan bakar. Fluks untuk neutron cepat dalam bahan bakar akan terjadi kenaikan, sedangkan untuk energi rendah terjadi penurunan. Hal tersebut terutama teramati pada daerah absorpsi resonansi. Hal ini terjadi karena adanya fenomena *self-shielding* pada bahan bakar.

5.1. Parameter Karakteristik Reaktor Heterogen

Analisis untuk reaktor heterogen sebenarnya hampir sama dengan analisis pada reaktor homogen. Sebagai contoh dimungkinkan untuk mendefinisikan faktor perlipatan pada perangkat heterogen tak hingga

sebagai banyaknya fisi pada satu generasi terhadap fisi pada generasi sebelumnya. Juga seperti halnya kasus homogen, diasumsikan bahwa serapan neutron termal, serapan resonansi dan fisi cepat merupakan proses yang berlangsung pada daerah energi yang terpisah sehingga faktor multiplikasi dapat dituliskan sebagai $k_\infty = \eta\, f\, p\, \epsilon$, dengan masing-masing faktor tersebut mempunyai arti yang sama seperti pada reaktor homogen. Akan tetapi faktor-faktor tersebut tidak dapat dihitung dari rumus-rumus yang dibangun untuk reaktor homogen. Beberapa metode untuk menghitung faktor-faktor tersebut akan dibahas di bab ini.

5.1.1. η

Eta, η, didefinisikan sebagai rata-rata banyaknya neutron fisi yang dihasilkan untuk setiap neutron termal yang diserap di bahan bakar. Jika bahan bakar terdiri dari campuran isotop fisil maupun non-fisil, maka η dinyatakan sebagai

$$\eta = \frac{\sum_j \nu_j \Sigma_{fj}}{\sum_j \Sigma_{aj}} \tag{5.1}$$

dengan j untuk semua jenis isotop yang ada dalam bahan bakar.

Nilai tampang lintang termal tergantung kepada spektrum neutron termal dan spektrum ini harus diketahui di dalam bahan bakar agar dapat digunakan untuk menghitung η. Akan tetapi untuk mendapatkan spektrum di bahan bakar heterogen lebih susah dibandingkan dengan kondisi homogen. Hal ini karena pada reaktor heterogen neutron menjadi termal di daerah moderator dan akan kembali ke bahan bakar. Dengan demikian spektrum neutron akan bervariasi terhadap posisi di dalam bahan bakar seperti tampak pada Gambar 5.3. Penentuan spektrum yang detail memerlukan perhitungan termalisasi gayut waktu dan itu di luar cakupan pokok bahasan kita. Di sini akan diasumsikan bahwa neutron termal di bahan bakar mengikuti distribusi Maxwell dan tidak gayut terhadap posisi. Tampang lintang pada Pers. (5.1) dinyatakan dengan

$$\Sigma_a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} g_a(T) \left(\frac{293}{T_n}\right)^{1/2} \Sigma_a(293) \tag{5.2}$$

$$\Sigma_f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} g_f(T) \left(\frac{293}{T_n}\right)^{1/2} \Sigma_f(293) \tag{5.3}$$

dengan $g_a(T)$ dan $g_f(T)$ adalah faktor non-$1/v$ untuk serapan dan fisi. Kedua faktor tersebut dapat dilihat pada Tabel 5.1.

.

5.1.2. Penggunaan termal

Faktor penggunaan termal, f, merupakan fraksi neutron termal yang diserap oleh bahan bakar pada sebuah kisi tak hingga yang terdiri dari bahan bakar dan moderator. Definisi tersebut dapat dituliskan

Tabel 5.1. *Faktor non*-$1/v$

T, °C	Cd	In	Xe-135	Sm-149	U-233		U-235		U-238	Pu-239	
	g_a	g_a	g_a	g_a	g_a	g_f	g_a	g_f	g_a	g_a	g_f
20	1,3203	1,0192	1,1581	1,6170	0,9983	1,0003	0,9780	0,9759	1,0017	1,0723	1,0487
100	1,5990	1,0350	1,2103	1,8874	0,9972	1,0011	0,9610	0,9581	1,0031	1,1611	1,1150
200	1,9631	1,0558	1,2360	2,0903	0,9973	1,0025	0,9457	0,9411	1,0049	1,3388	1,2528
400	2,5589	1,1011	1,1864	2,1854	1,0010	1,0068	0,9294	0,9208	1,0085	1,8905	1,6904
600	2,9031	1,1522	1,0914	2,0852	1,0072	1,0128	0,9229	0,9108	1,0122	2,5321	2,2037
800	3,0455	1,2123	0,9887	1,9246	1,0146	1,0201	0,9182	0,9036	1,0159	3,1006	2,6595
1000	3,0599	1,2915	0,8858	1,7568	1,0226	1,0284	0,9118	0,8956	1,0198	3,5353	3,0079

sebagai:

$$f = \frac{\int \Sigma_{aF}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV}{\int \Sigma_{aF}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV + \int \Sigma_{aM}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV} \tag{5.4}$$

Karena pada reaktor heterogen bahan bakar dan moderator merupakan daerah yang terpisah dan homogen, kuantitas Σ_{aF} dan Σ_{aM} konstan di masing-masing daerah. Dengan demikian Pers. (5.4) menjadi

$$f = \frac{\Sigma_{aF}\int_{V_F} \phi(\mathbf{r})\,dV}{\Sigma_{aF}\int_{V_F} \phi(\mathbf{r})\,dV + \Sigma_{aM}\int_{V_M} \phi(\mathbf{r})\,dV} \tag{5.5}$$

dengan V_F dan V_M masing-masing menyatakan volume bahan bakar dan volume moderator.

Jika fluks rata-rata di bahan bakar, $\overline{\phi_F}$, dan fluks rata-rata di moderator, $\overline{\phi_M}$, dinyatakan dengan

$$\overline{\phi_F} = \frac{1}{V_F}\int_{V_F} \phi(\mathbf{r})\,dV \tag{5.6}$$

$$\overline{\phi_M} = \frac{1}{V_M}\int_{V_M} \phi(\mathbf{r})\,dV \tag{5.7}$$

maka Pers. (5.5) menjadi

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Sigma_{aF}V_F\overline{\phi_F}}{\Sigma_{aF}V_F\overline{\phi_F} + \Sigma_{aM}V_M\overline{\phi_M}} \\ &= \frac{\Sigma_{aF}}{\Sigma_{aF} + \dfrac{V_M}{V_F}\Sigma_{aM}\zeta} \end{aligned} \tag{5.8}$$

dengan $\zeta = \dfrac{\overline{\phi_M}}{\overline{\phi_F}}$ merupakan rasio fluks rerata di moderator terhadap fluks di bahan bakar.

Dari Gambar 5.3 tampak bahwa fluks di moderator lebih besar daripada fluks di bahan bakar. Hal ini disebabkan adanya serapan di bahan bakar. Dengan demikian, nilai ζ akan lebih besar daripada satu dan Pers. (5.8) menunjukkan bahwa *faktor penggunaan termal pada sistem heterogen selalu lebih kecil daripada sistem dengan campuran homogen material yang sama*. Untuk itu besaran ζ dikenal sebagai ***faktor rugi termal***.

Dari Pers. (5.8) tampak bahwa f dapat dihitung apabila fluks di bahan bakar dan moderator diketahui. Akan tetapi fluks tidak dapat diketahui dengan pasti kecuali dengan komputasi numerik yang mendalam. Beberapa metode analitis telah diajukan untuk mendapatkan pendekatan yang bagus untuk nilai f. Dua metode yang biasa digunakan akan dibahas di sini.

Metode teori difusi

Metode ini berdasar pada asumsi bahwa teori difusi valid baik di bahan bakar maupun di moderator. Terdapat pula beberapa asumsi tambahan, yaitu:

1. Densitas perlambatan neutron bernilai nol di bahan bakar. Dengan demikian dianggap sumber neutron hanya ada di moderator saja.
2. Densitas perlambatan termal di moderator adalah konstan dan tidak gayut terhadap posisi.
3. Densitas arus neutron adalah nol sepanjang batas masing-masing sel satuan yang berisi *fuel lump* di bagian tengahnya.

Misal perangkat bahan bakar–moderator terdiri dari larik elemen bahan bakar berbentuk papan dengan tebal $2a$ yang terpisah oleh daerah moderator dengan tebal $2(b-a)$. Sumber neutron termal sebesar S_M hanya ada di moderator. Perhitungan dilakukan pada separo elemen bahan bakar papan, mulai dari $x = 0$ sampai $x = a$ dan separo daerah moderator mulai dari $x = a$ sampai $x = b$. Persamaan difusi neutron di bahan bakar dan moderator dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} -D_F \frac{d^2\phi_F(x)}{dx^2} + \Sigma_{aF}\phi_F(x) = 0 \qquad \text{(bahan bakar)} \\ -D_M \frac{d^2\phi_M(x)}{dx^2} + \Sigma_{aM}\phi_M(x) = S_M \qquad \text{(moderator)} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Syarat batas yang berlaku:

$$\frac{d\phi_F(0)}{dx} = 0 \tag{5.10a}$$

$$\frac{d\phi_M(b)}{dx} = 0 \tag{5.10b}$$

$$\phi_F(a) = \phi_M(a) \tag{5.10c}$$

$$D_F \frac{d\phi_F(a)}{dx} = D_M \frac{d\phi_M(a)}{dx} \tag{5.10d}$$

Solusi Pers. (5.9) yang memenuhi syarat Pers. (5.10) adalah

$$\phi_F(x) = \frac{S_M \cosh\left(\dfrac{x}{L_F}\right)}{\left\{\left(\dfrac{L_F}{D_F}\right)\coth\left(\dfrac{a}{L_F}\right) + \left(\dfrac{L_M}{D_M}\right)\coth\left[\dfrac{b-a}{L_M}\right]\right\}\left(\dfrac{D_F}{L_F}\right)\Sigma_{aM}\sinh\left(\dfrac{a}{L_F}\right)} \tag{5.11}$$

dan

$$\phi_M(x) = \frac{S_M}{\Sigma_{aM}}\left[1 - \frac{\cosh\left(\dfrac{b-x}{L_M}\right)}{\left\{\left(\dfrac{L_F}{D_F}\right)\coth\left(\dfrac{a}{L_F}\right) + \left(\dfrac{L_M}{D_M}\right)\coth\left[\dfrac{b-a}{L_M}\right]\right\}\left(\dfrac{D_M}{L_M}\right)\sinh\left(\dfrac{b-a}{L_M}\right)}\right] \tag{5.12}$$

Faktor rugi termal dinyatakan dengan

$$\zeta = \frac{\overline{\phi_M}}{\overline{\phi_F}} = \frac{a\int_a^b \phi_M(x)dx}{(b-a)\int_0^a \phi_F(x)dx} \tag{5.13}$$

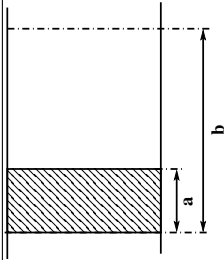
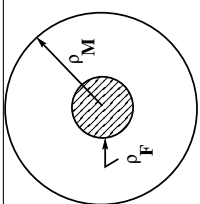
$$= \frac{V_F\Sigma_{aF}}{V_M\Sigma_{aM}}\left(\frac{V_M\Sigma_{aM}}{V_F\Sigma_{aF}}F + E - 1\right)$$

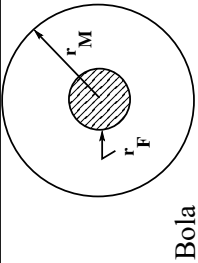
dengan $V_F = a$, $V_M = b - a$ dan

$$E = \frac{a}{L_F}\coth\frac{a}{L_F} \tag{5.14a}$$

$$F = \frac{b-a}{L_M}\coth\left(\frac{b-a}{L_M}\right) \tag{5.14b}$$

Dengan cara yang sama,faktor rugi termal untuk reaktor geometri yang lain dapat ditentukan. Tabel 5.2 dan 5.3 menunjukkan nilai fungsi E dan F untuk beberapa geometri sel.

Metode ABH

Penentuan faktor rugi termal menggunakan teori difusi mempunyai beberapa kekurangan diakibatkan oleh sifat dasar teori difusi itu sendiri. Oleh karenanya digunakan metode yang lebih akurat berdasarkan dari teori transport neutron. Salah satunya adalah metode peluang tumbukan ABH atau biasa disebut dengan metode ABH saja. Metode ABH ini yang dilontarkan pertama kali oleh Amouyal, Benoist dan Horowitz banyak digunakan untuk menghitung faktor rugi termal sebelum tersedianya kode transport perangkat bahan bakar serta memberikan gambaran fisis tentang permasalahan transport pada sel satuan.

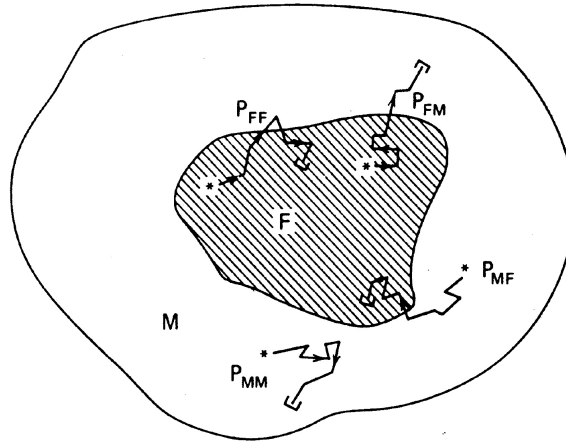
Sebuah sel satuan terdiri dari bahan bakar (F) dan moderator (M) dan diasumsikan arus netto nol pada batas sel (lihat Gambar 5.4). Selanjutnya juga diasumsikan bahwa sumber perlambatan neutron bersifat seragam di moderator dan nol di bahan bakar. Di samping itu didefinisikan parameter sebagai berikut:

P_{FM} $\equiv$ probabilitas rata-rata bahwa sebuah neutron dilahirkan secara seragam dan isotropis di daerah F akan diserap di daerah M.

P_F $\equiv$ probabilitas rata-rata bahwa sebuah neutron dilahirkan secara seragam dan isotropis di daerah F akan lolos dari bahan bakar sebelum diserap.

Tabel 5.2. *Fungsi E dan F untuk geometri sel papan dan silinder.*

Geometri	Fungsi E dan F	V_F dan V_M
Papan	$E = \frac{a}{L_F} \coth \frac{a}{L_F}$	$V_F = a$
	$F = \frac{b-a}{L_M} \coth \left(\frac{b-a}{L_M} \right)$	$V_M = b - a$
Silinder	$F = \frac{\frac{\rho_F}{L_F} I_0 \left(\frac{\rho_F}{L_F} \right)}{2 I_1 \left(\frac{\rho_F}{L_F} \right)}$	$V_F = \pi \rho_F^2$
	$E = \frac{\frac{1}{L_M} \left(\rho_M^2 - \rho_F^2 \right)}{2\rho_F} \left[\frac{I_0 \left(\frac{\rho_F}{L_M} \right) K_1 \left(\frac{\rho_M}{L_M} \right) + K_0 \left(\frac{\rho_F}{L_M} \right) I_1 \left(\frac{\rho_M}{L_M} \right)}{I_1 \left(\frac{\rho_M}{L_M} \right) K_1 \left(\frac{\rho_F}{L_M} \right) - K_1 \left(\frac{\rho_M}{L_M} \right) I_1 \left(\frac{\rho_F}{L_M} \right)} \right]$	$V_M = \pi \left(\rho_M^2 - \rho_F^2 \right)$

Tabel 5.3. *Fungsi E dan F untuk geometri bola.*

Geometri	Fungsi E dan F	V_F dan V_M
Bola	$F = \dfrac{\left(\dfrac{r_F}{L_F}\right)^2 \tanh\left(\dfrac{r_F}{L_F}\right)}{3\left[\left(\dfrac{r_F}{L_F}\right) - \tanh\left(\dfrac{r_F}{L_F}\right)\right]}$	$V_F = \dfrac{4}{3}\pi r_F^3$
	$E = \dfrac{r_M^3 - r_F^3}{3r_F L_M^2} \dfrac{1 - \left(\dfrac{r_M}{L_M}\right) \coth\left[\dfrac{(r_M - r_F)}{L_M}\right]}{1 - \dfrac{r_M r_F}{L_M^2} - \left[\dfrac{(r_M - r_F)}{L_M}\right] \coth\left[\dfrac{(r_M - r_F)}{L_M}\right]}$	$V_M = \dfrac{4}{3}\pi\left(r_M^3 - r_F^3\right)$

Gambar 5.4. *Probabilitas serapan yang mencirikan sel dua daerah.*

β_M $\equiv$ probabilitas bersyarat bahwa sebuah neutron yang telah lolos dari F ke M, akan diserap di M.

Probabilitas yang serupa, P_{MF} juga dapat didefinisikan untuk daerah M. Di sini akan berlaku hubungan resiprositas

$$V_F \Sigma_a^F P_{FM} = V_M \Sigma_a^M P_{MF} \tag{5.15}$$

Karena neutron hanya akan mengalami perlambatan menjadi termal di moderator saja, hubungan resiprositas dapat digunakan untuk menuliskan faktor penggunaan termal sebagai berikut

$$f \equiv P_{MF} = \frac{V_F}{V_M}\frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^M} P_{FM} = \frac{\Sigma_a^F V_F \phi_F}{\Sigma_a^F V_F \phi_F + \Sigma_a^M V_M \phi_M} \tag{5.16}$$

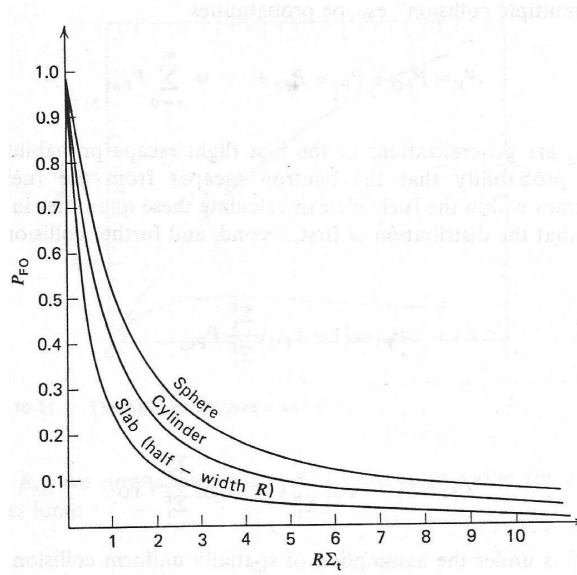
dan faktor rugi termal dapat ditulis sebagai

$$\zeta = \frac{\phi_M}{\phi_F} = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^M}\frac{V_F}{V_M}\left(\frac{1}{f} - 1\right) = \frac{1}{P_{FM}} - \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^M}\frac{V_F}{V_M} \tag{5.17}$$

Probabilitas sebuah neutron yang dilahirkan secara seragam dan isotropis di bahan bakar dapat lolos ke moderator tanpa melakukan tumbukan (*first flight escape probablity*) dinyatakan dengan

$$P_{F0} \approx \frac{1}{1 + \dfrac{4 V_F \Sigma_t^F}{S_F}} \tag{5.18}$$

dengan S_F adalah luas permukaan bahan bakar. Gambar 5.5 menunjukkan nilai P_{F0} untuk beberapa jenis geometri reaktor.

Jika neutron tidak lolos tetapi mengalami hamburan di dalam bahan bakar dengan probabilitas sebesar $(1 - P_{F0})\frac{\Sigma_s^F}{\Sigma_t^F}$, neutron tersebut juga mempunyai probabilitas lolos tanpa tumbukan kedua sebesar P_{F0}. Mengikuti argumen semacam ini maka probabilitas total bahwa neutron akan lolos dari bahan bakar ke moderator dapat dituliskan sebagai berikut

Gambar 5.5. *Nilai first flight escape probability untuk beberapa jenis geometri reaktor.*

$$
\begin{aligned}
P_F &= P_{F0}\left[1+(1-P_{F0})\frac{\Sigma_s^F}{\Sigma_t^F}+(1-P_{F0})^2\left(\frac{\Sigma_s^F}{\Sigma_t^F}\right)^2+\ldots\right] \\
&= \frac{P_{F0}}{1-(1-P_{F0})\dfrac{\Sigma_s^F}{\Sigma_t^F}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{\Sigma_a^F(1-P_{F0})}{\Sigma_t^F P_{F0}}}
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

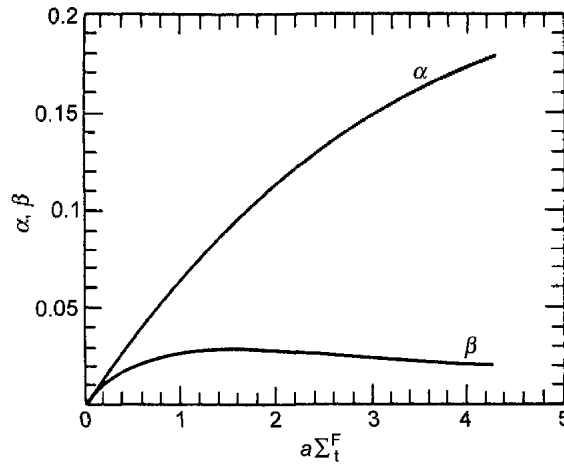
Rumusan yang lebih akurat yang memperhitungkan distrisi tumbukan pertama yang tidak seragam untuk batang bahan bakar silinder dengan jari-jari a adalah

$$
P_F=\left\{1+\frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_t^F}\left(\frac{1-P_{F0}}{P_{F0}}-a\Sigma_t^F\right)\left[1+\alpha\frac{\Sigma_s^F}{\Sigma_t^F}+\beta\left(\frac{\Sigma_s^F}{\Sigma_t^F}\right)^2\right]+a\Sigma_a^F\right\}^{-1}
\tag{5.20}
$$

dengan parameter α dan β diberikan pada Gambar 5.6.

Dari definisi tampak bahwa

$$
P_{FM}=P_F\beta_M
\tag{5.21}
$$

Persamaan (5.16) dapat diatur kembali menjadi

Gambar 5.6. *Parameter α dan β untuk digunakan dalam perhitungan probabilitas lolos pada silinder menggunakan metode ABH.*

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} - 1 &= \frac{\Sigma_a^M}{\Sigma_a^F}\frac{V_M}{V_F}\frac{1}{P_F} + \frac{1 - f - \beta_M}{f} \\ &= \frac{\Sigma_a^M}{\Sigma_a^F}\frac{V_M}{V_F}\frac{1}{P_F} + \frac{1 - P_{MF}}{P_{MF}} - \frac{\beta_M}{P_{MF}}\end{aligned} \tag{5.22}$$

Menggunakan relasi resiprositas, Pers. (5.15), dan melakukan pendekatan $P_F \approx P_{F0} \approx \dfrac{S_F}{4V_F\Sigma_a^F}$ (hanya untuk tujuan mengestimasi nilai β_M), diperoleh pendekatan untuk probabilitas bersyarat

$$\beta_M \approx \frac{4\Sigma_a^M V_M}{S_M} P_{MF} \tag{5.23}$$

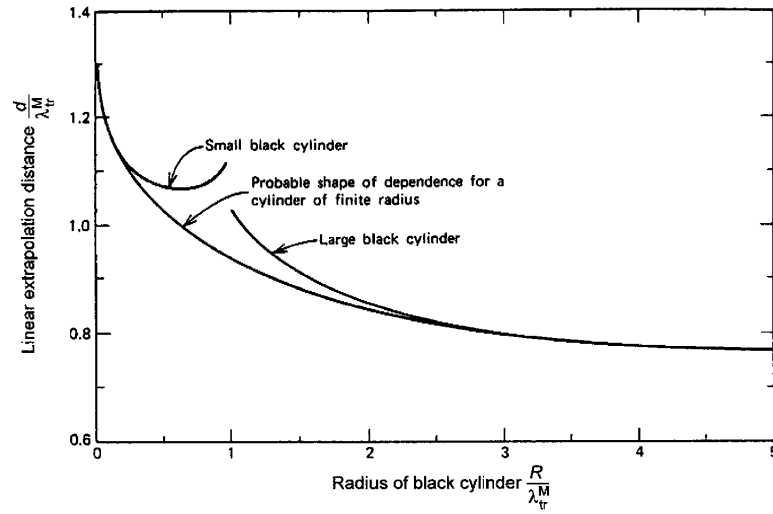
Selain itu digunakan juga pendekatan $P_{MF} \approx P_M$ dan menghitung P_M dengan jalan menyelesaikan persamaan difusi di moderator

$$-D_M\nabla^2\phi_M(\mathbf{r}) + \Sigma_a^M\phi_M(\mathbf{r}) = q_M \tag{5.24}$$

(Penyelesaian persamaan difusi tidak dijabarkan di diktat ini, silakan lihat di buku referensi Lamarsh.)

Dengan cara ini diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} - 1 =& \frac{\Sigma_a^M V_M}{\Sigma_a^F V_F}\left\{1 + \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_t^F}\left(\frac{1 - P_{F0}}{P_{F0}} - a\Sigma_t^F\right) \times \left[1 + \alpha\frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_t^F} + \beta\left(\frac{\Sigma_s^F}{\Sigma_t^F}\right)^2\right]\right\} \\ &+ \left(\frac{ad}{2L_M^2} - a\Sigma_a^M\right)\frac{V_M}{V_F} + E\left(\frac{a}{L_M}, \frac{b}{L_M}\right) - 1\end{aligned} \tag{5.25}$$

dengan d adalah syarat batas transport (lihat Gambar 5.7) dan faktor rugi termal dihitung dengan

Gambar 5.7. *Syarat batas transport untuk silinder*

$$\zeta = \frac{\Sigma_a^F V_F}{\Sigma_a^M V_M}\left(\frac{1}{f} - 1\right) \tag{5.26}$$

5.1.3. Probabilitas lolos resonansi

Pada pembahasan terdahulu telah ditunjukkan bahwa faktor penggunaan termal untuk kisi heterogen adalah lebih kecil dibandingkan pada sistem yang homogen karena inti atom bahan bakar di dekat permukaan bahan bakar akan cenderung menutupi inti atom di bagian dalam dari fluks neutron yang berasal dari moderator di sekelilingnya. Hal ini disebut dengan *spatial self-shielding*. Fenomena yang serupa juga muncul pada *neutron resonansi* yaitu neutron yang mempunyai energi di dalam daerah resonansi bahan bakar. Penurunan fluks yang tajam pada bahan bakar terjadi pada daerah energi resonansi. Nilai absorpsi yang sangat kuat dalam bahan bakar yang menyebabkan banyak neutron yang berasal dari daerah moderator memasuki daerah bahan bakar akan terserap pada sisi luar daerah bahan bakar. Sehingga penurunan fluks neutron dalam daerah bahan bakar terjadi akibat dari kuatnya shielding oleh inti bahan bakar pada permukaan. Fenomena ini dikenal dengan nama *energy self-shielding*. Dengan demikian probabilitas relatif neutron akan ditangkap di daerah resonansi bahan bakar akan lebih kecil apabila bahan bakar dibuat mengumpul dibandingkan dengan sistem yang homogen. Oleh karenanya hal itu berarti bahwa *probabilitas lolos resonansi pada sistem heterogen menjadi lebih besar dibandingkan dengan sistem homogen yang ekivalen.*

Mengumpulkan bahan bakar dan memisahkannya dari moderator juga akan meningkatkan probabilitas lolos resonansi karena alasan geometri. Dengan bahan bakar dibentuk menjadi gumpalan yang diskret, neutron akan mengalami perlambatan sampai energinya lebih rendah daripada daerah resonansi di moderator dan tidak pernah bertemu bahan bakar di rentang energi resonansi. Akan tetapi kenaikan nilai p karena efek ini relatif kecil bila dibandingkan dengan yang disebabkan oleh penurunan fluks neutron resonansi di bahan bakar.

Probabilitas lolos resonansi untuk urutan resonansi yang terpisah dapat dituliskan sebagai berikut

$$p = \prod_i p_i \approx \exp\left[-\frac{V_F}{V}\int \Sigma_a^F \phi_F \, dE\right] \tag{5.27}$$

dan biasanya dituliskan sebagai

$$p = \exp\left[-\frac{N_F V_F I}{\xi_F \Sigma_p^F V_F + \xi_M \Sigma_s^M V_M}\right] \tag{5.28}$$

dengan I adalah integral resonansi yang dinyatakan dengan

$$I = \overline{\xi\Sigma_p}\int \sigma_a^F \phi_F \, dE \tag{5.29}$$

Parameter $\overline{\xi\Sigma_p}$ diberikan dengan

$$\overline{\xi\Sigma_p} = \frac{1}{V}(\xi_F \Sigma_p^F V_F + \xi_M \Sigma_s^M V_M) \tag{5.30}$$

dengan Σ_p^F adalah hamburan potensial bahan bakar dan $V = V_F + V_M$ adalah volume total sel ekivalen.

Hamburan potensial dinyatakan dengan

$$\sigma_p = 4\pi R^2 \tag{5.31}$$

dengan R adalah jari-jari nuklir dan dinyatakan dengan

$$R = 1,25 \times 10^{-13} A^{1/3} \text{ cm} \tag{5.32}$$

Sekarang problem yang harus diselesaikan adalah bagaimana menentukan integral resonansi. Tergantung dari lebar rentang energi resonansi, terdapat dua buah pendekatan untuk menghitung nilai integral resonansi. Tapi sebelum melihat lebih jauh kedua pendekatan tersebut kita akan melihat terlebih dahulu satu parameter lagi.

Lebar praktis

Lebar praktis (*practical width*) suatu resonansi didefinisikan sebagai rentang energi di mana tampang lintang resonansinya (yaitu jumlahan tampang lintang resonansi serapan dan hamburan) lebih besar daripada bagian non-resonansi dari tampang lintang suatu nuklida (yaitu tampang lintang hamburan potensial). Nilai ini ditentukan berdasarkan formula Breit-Wigner sebagai berikut

$$\Gamma_p \approx \sqrt{\frac{\sigma_0}{4\pi R^2}}\Gamma = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_p}}\Gamma \tag{5.33}$$

Pendekatan NR

Pendekatan NR (*Narrow Resonance*) digunakan apabila hilangnya energi pada hamburan elastik dengan bahan bakar lebih besar daripada lebar praktis resonansi, $\Gamma_p \ll E_0(1-\alpha_{res})$, sehingga neutron biasanya menjumpai tumbukan tidak lebih dari satu kali di dalam resonansi.

Integral resonansi untuk pendekatan NR dinyatakan dengan

$$I(NR) = \int \left[\sigma_p^F + P_{F0}\left(\sigma_t^F - \sigma_p^F\right)\right]\frac{\sigma_a^F}{\sigma_t^F}\frac{dE}{E} \tag{5.34}$$

P_{F0} adalah *first flight escape probability* yang telah dirumuskan di Pers. (5.18).

Pendekatan NRIM

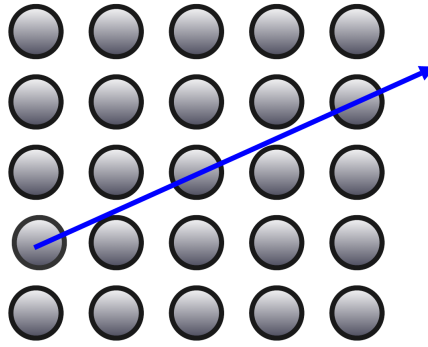
Apabila hilangnya energi per tumbukan di bahan bakar lebih kecil daripada lebar praktis, maka cukup beralasan untuk mengabaikan sama sekali hilangnya energi di bahan bakar. Ini merupakan dasar untuk pendekatan NRIM (*Narrow Resonance Infinite Mass*). Situasi yang terjadi cukup kompleks untuk sistem heterogen karena neutron bisa saja mengalami beberapa kali hamburan di bahan bakar pada rentang resonansi tunggal sebelum lolos. Sebagai penyederhanaan, maka nilai P_{F0} di Pers. (5.34) diganti dengan probabilitas lolos total, P_F, seperti yang telah dituliskan di Pers. (5.19).

Dengan demikian integral resonansi untuk pendekatan NRIM dapat dituliskan sebagai berikut

$$I(NRIM) = \int \frac{P_{F0}\sigma_a^F}{1-(1-P_{F0})\left(\dfrac{\sigma_s^F}{\sigma_t^F}\right)}\frac{dE}{E} \tag{5.35}$$

Faktor koreksi Dancoff

Sejauh ini perhitungan untuk serapan resonansi di bahan bakar dianggap bahwa sel bahan bakar merupakan satuan yang terisolasi dari sel bahan bakar yang lain. Akan tetapi jika batang bahan bakar pada suatu kisi terpisah oleh moderator dengan jarak hanya beberapa kali panjang bebas rata-rata (*mean free path*), maka ada kemungkinan neutron dengan energi pada daerah resonansi akan lewat dari satu bongkahan ke bongkahan bahan bakar yang lain. Hal ini menyebabkan perhitungan terhadap probabilitas lolos menjadi tidak valid, karena untuk perhitungan tersebut diasumsikan bahwa probabilitas lolos dari bahan bakar P_{F0} menyatakan neutron lolos dari bahan bakar akan mengalami tumbukan berikutnya di moderator. Akan tetapi jika terdapat bongkahan bahan bakar yang berdekatan, tumbukan berikutnya bisa saja terjadi di bahan bakar. Oleh karenanya perlu dihitung nilai probabilitas lolos yang telah dikoreksi, P_{F0}^*, yaitu bahwa neutron yang lahir di bahan bakar akan mengalami tumbukan di moderator meskipun terdapat beberapa elemen bahan bakar yang berdekatan. Kemudian kita dapat menggunakan analisis sebelumnya dengan menggantikan P_{F0} dengan P_{F0}^*.

$$P_{F0}^* = P_{F0}\frac{(1-C)}{1-C\left(1-P_{F0}\Sigma_t^F\overline{R}\right)} \tag{5.36}$$

Gambar 5.8. *Efek rod-shadowing pada probabilitas lolos.*

Tabel 5.4. *Faktor Dancoff C untuk silinder paralel.*

	radius/λ_{tr}					
Pitch/radius	0	0,25	0,50	1,0	1,5	2,0
2,00	0,182	0,170	0,1600	0,1440	0,1320	0,1230
2,25	0,155	0,132	0,1140	0,0860	0,0670	0,0522
2,50	0,136	0,107	0,0849	0,0550	0,0364	0,0245
2,75	0,122	0,088	0,0649	0,0362	0,0208	0,0122
3,00	0,111	0,074	0,0505	0,0244	0,0122	0,0062
4,00	0,081	0,040	0,0205	0,0057	0,0016	0,0005
5,00	0,065	0,024	0,0091	0,0015	0,0003	-
6,00	0,054	0,015	0,0043	0,0004	-	-
7,00	0,046	0,009	0,0021	0,0001	-	-
8,00	0,040	0,006	0,0011	-	-	-
9,00	0,036	0,004	0,0006	-	-	-
10,0	0,032	0,003	0,0003	-	-	-

Data selengkapnya dapat dilihat di BNL-5800.

dengan $\overline{R}$ adalah *mean chord length* yang dinyatakan dengan

$$\overline{R} = \frac{4V}{S_F} \tag{5.37}$$

dan C merupakan parameter yang dikenal sebagai *faktor Dancoff*. Nilai faktor Dancoff tergantung kepada geometri dan tampang lintang bahan bakar. Dengan adanya faktor Dancoff ini maka bocoran efektif dari bahan bakar akan berkurang. Tabel 5.4 menampilkan nilai faktor Dancoff.

Pendekatan empiris

Sejumlah eksperimen telah dilakukan untuk menghitung integral resonansi. Untuk bahan bakar UO_2 pada suhu 20 °C, nilai integral resonansi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$I^{28}(NR) = 11,6 + 22,8\frac{S_F}{M_F} \tag{5.38}$$

$$I^{28}(NRIM) = 4,15 + 26,6\sqrt{\frac{S_F}{M_F}} \tag{5.39}$$

dengan M_F adalah massa bahan bakar.

Korelasi eksperimental juga telah dilakukan untuk menentukan integral resonansi gayut waktu. Untuk rentang antara 20–600 °C berlaku

$$I^{28} = I^{28}(300K)\left[1 + \beta\left(\sqrt{T} - \sqrt{300}\right)\right] \tag{5.40}$$

dengan β bernilai antara 0,006 – 0,008.

Integral resonansi yang memperhitungkan baik parameter kisi maupun pengaruh suhu dinyatakan dengan korelasi Strawbridge-Barry:

$$I^{28} = 2,16x + 2,56 + [0,0279x - 0,0537]\sqrt{T} \tag{5.41}$$

dengan

$$x = \left[\frac{\Sigma_p^F}{N^{28}}P_{F0} + \frac{(1-C)}{\overline{R}\,N^{28}}\right]^{1/2} \tag{5.42}$$

5.1.4. Faktor fisi cepat

Nilai faktor ϵ akan meningkat jika rasio volume uranium – air makin tinggi. Jika lebih banyak uranium maka probabilitas neutron produk fisi akan mengenai inti uranium sebelum energinya turun sampai tingkat yang tidak memungkinkan fisi cepat karena mengalami pelambatan karena tumbukan. Umumnya pengaruh heterogenias terhadap nilai ϵ sangat kecil.

Metode SFS

Nilai ϵ untuk sistem heterogen dapat dihitung menggunakan metode SFS (Spinrad-Fleishman-Soodak). Pada metode ini diasumsikan bahwa begitu neutron meninggalkan bahan bakar, neutron tersebut akan melambat di moderator tanpa kembali ke bahan bakar (tidak di atas ambang batas energi fisi). Untuk menghitung ϵ, semua neutron dibagi menjadi tiga grup:

Grup 1. Grup ini terdiri dari semua neutron fisi dengan energi di atas E_f. Neutron hilang dari grup ini karena serapan, bocor dari gumpalan atau hamburan ke energi di bawah E_f.

Grup 2. Neutron pada grup ini mempunyai energi di bawah E_f. Neutron tersebut hilang karena serapan dan bocoran serta diasumsikan bahwa neutron tidak dihamburkan keluar dari grup ini.

Grup 3. Grup ini terdiri dari neutron dengan energi di bawah E_f yang telah terhambur keluar dari Grup 1. Neutron hilang dari grup ini akibat serapan atau bocoran dan seperti pada Grup 2 neutron tidak dihamburkan keluar dari grup ini.

Nilai ϵ dihitung menggunakan metode SFS sebagai berikut

$$\epsilon = \frac{\chi_1 P_1}{1-(1-P_1)\beta_1} + \left[\chi_2 + \frac{\chi_2 \nu_1 \chi_1 (1-P_1)}{1-(1-P_1)\beta_1}\frac{\sigma_{1f}}{\sigma_{1t}}\right]\left[\frac{P_2}{1-(1-P_2)\beta_2}\right] + \left[\frac{\chi_1(1-P1)}{1-(1-P_1)\beta_1}\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{1t}}\right]\left[\frac{P_3}{1-(1-P_3)\beta_3}\right] \tag{5.43}$$

dengan

$$\beta_1 = \frac{\chi_1 \nu_1 \sigma_{1f} + \sigma_{11}}{\sigma_{1t}} \tag{5.44a}$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_t} \tag{5.44b}$$

$$\beta_3 = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{3t}} \tag{5.44c}$$

χ_1 dan χ_2 merupakan fraksi neutron fisi yang dihasilkan di atas dan dibawah ambang energi fisi

$$\chi_1 = \int_{E_f}^{\infty} \chi(E)\, dE \tag{5.45a}$$

$$\chi_2 = \int_{0}^{E_f} \chi(E)\, dE \tag{5.45b}$$

dengan $\chi(E)$ merupakan spektrum fisi yang dinyatakan dengan

$$\chi(E) = 0,453 \exp(-1,036E)\ \sinh\sqrt{2,29E} \tag{5.46}$$

Untuk U-238 dan Th-232, E_f adalah sekitar 1,4 MeV, sehingga nilai $\chi_1 = 0,561$ dan $\chi_2 = 1-\chi_1 = 0,439$.

P_1, P_2 dan P_3 merupakan *first flight escape probability* P_{F0} pada energi grup 1, grup 2 dan grup 3. Perlu diingat bahwa P_{F0} merupakan fungsi dari $\overline{R}\Sigma_t^F$ dan tampang lintang total Σ_t^F merupakan fungsi dari energi.

σ_{11} dan σ_{22} merupakan tampang lintang hamburan di dalam grup (*within grup scattering*). Tampang lintang total dinyatakan dengan

$$\sigma_{1t} = \sigma_{1f} + \sigma_{1\gamma} + \sigma_{11} + \sigma_{13} \tag{5.47a}$$

$$\sigma_{2t} = \sigma_{2\gamma} + \sigma_{22} \tag{5.47b}$$

$$\sigma_{3t} = \sigma_{3\gamma} + \sigma_{33} \tag{5.47c}$$

Tabel 5.5. *Tampang lintang tiga grup (satuan barn) untuk menghitung ϵ*

Material	σ_{1t}	σ_{1f}	$\nu_1\sigma_{1f}$	σ_{11}	σ_{13}	$\sigma_{1\gamma}$
U^{238}	4,52	0,549	1,56	1,89	2,07	0,054
$U^{238}O_2$	7,77	0,549	1,56	5,10	2,07	0,099
Material	σ_{2t}	σ_{22}	$\sigma_{2\gamma}$	σ_{3t}	σ_{33}	$\sigma_{3\gamma}$
U^{238}	6,05	5,91	0,138	5,66	5,53	0,135
$U^{238}O_2$	14,54	14,40	0,138	14,15	14,01	0,135

Perlu diperhatikan juga bahwa ϵ pada reaktor heterogen bernilai lebih besar daripada sistem homogen. Hal ini dikarenakan adana kemungkinan yang lebih besar pada kondisi homogen bahwa neutron fisi akan dihamburkan ke bawah batas fisi ketika menumbu dengan moderator sebelum neutron tersebut mempunyai kesempatan untuk berinteraksi dengan inti bahan bakar. Ketika bahan bakar digumpalkan, neutron fisi harus melalui daerah atom-atom bahan bakar sebelum bertemu dengan moderator dan ini akan cenderung meningkatkan probabilitas fisi cepat.

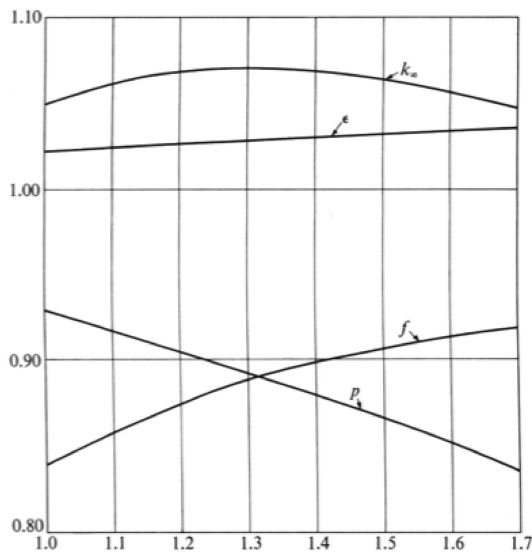
Kisi rapat

Pada kisi yang rapat di mana batang bahan bakar tidak lagi terisolasi, perhitungan ϵ menggunakan Pers. (5.43) dapat dilakukan, hanya saja perlu dilakukan koreksi terhadap nilai P_1, P_2 dan P_3. Ketiga parameter yang terkoreksi tersebut dihitung berdasar faktor koreksi Dancoff seperti pada Pers. (5.36).

5.1.5. Faktor multiplikasi tak hingga

Secara general dapat dikatakan bahwa nilai k_∞ untuk sistem heterogen lebih besar dibanding sistem homogen pada keadaan rapat inti yang sama. Misalnya untuk sistem Uranium alam dan grafit pada campuran homogen akan dapat mencapai maximum nilai $k_\infty = 0,85$, sedangkan jika batang uranium disusun heterogen dapat mencapai $k_\infty > 1$.

Dari pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan bahwa faktor penggunaan termal, f, pada kisi heterogen bernilai lebih kecil dibandingkan dengan campuran homogen material yang sama. Akan tetapi probabilitas lolos resonansi, p, dan faktor fisi cepat, ϵ, pada kisi heterogen bernilai lebih besar. Jika penurunan f dapat diimbangi dengan kenaikan nilai p dan ϵ, maka nilai k_∞ pada sistem heterogen akan lebih besar daripada sistem homogen yang ekivalen. Hal ini berlaku pada uranium alam maupun uranium yang sedikit diperkaya. Sampai dengan pengkayaan U-235 sekitar 5%, nilai k_∞ akan meningkat apabila bahan bakar dipisah dari moderator, akan tetapi pada pengkayaan yang lebih tinggi nilai k_∞ akan berkurang.

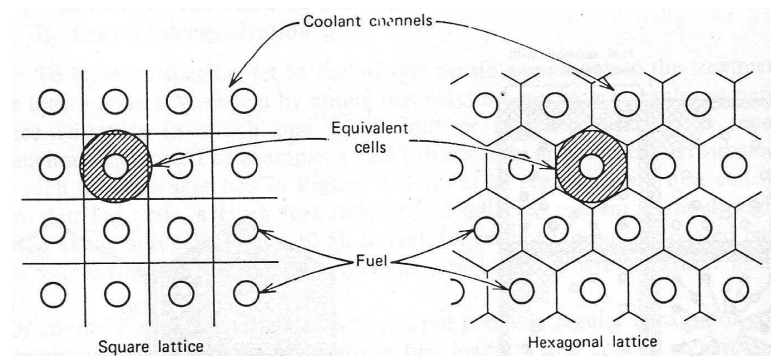
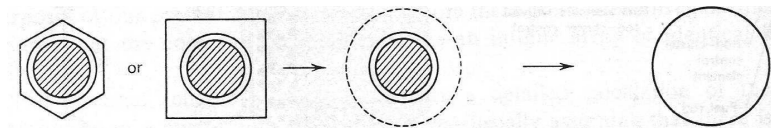
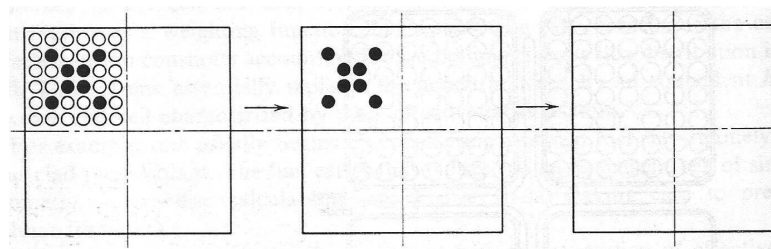
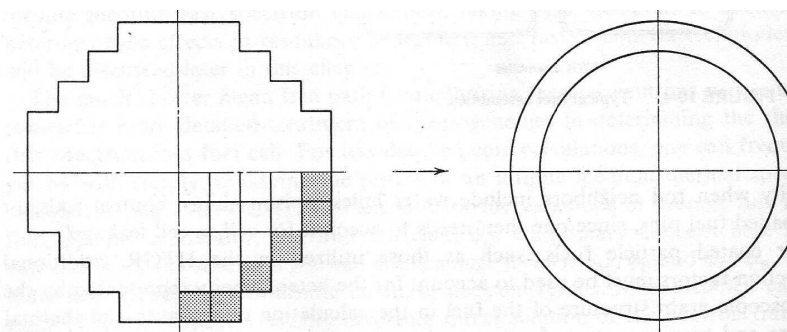
Efek geometri juga akan mempengaruhi nilai k_∞ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.9. Seiring dengan kenaikan ukuran batang bahan bakar, f dan ϵ akan naik secara monoton sementara nilai p akan turun secara monoton. Dengan demikian k_∞ akan mengalami nilai maksimum. Dengan demikian akan terdapat ukuran batang bahan bakar yang optimum (dan juga konsentrasi optimum) dengan nilai k_∞ yang paling besar. Jari-jari ini yang kemudian biasanya diambil untuk digunakan di dalam reaktor.

Gambar 5.9. *Pengaruh jari-jari batang bahan bakar (dalam cm) terhadap parameter reaktor.*

5.2. Homogenisasi teras

Analisis heterogenitas memerlukan penentuan fluks dalam bahan bakar dan moderator agar nilai f dapat dihitung. Umumnya perhitungan dilakukan dengan cara homogenisasi *sel satuan* dari elemen bakar atau keseluruhan daerah teras.

Teras reaktor mempunyai struktur kisi yang periodik yang mana satu subelemen yang disebut *sel satuan* akan berulang-ulang di teras reaktor. Sebagai contoh satu subassembly bahan bakar atau sekelompok subassembly bahan bakar seperti pada 5.1 dapat dianggap sebagai sel satuan. Untuk skala yang lebih detail, elemen bahan bakar dan kanal pendingin di sekitarnya seperti pada Gambar 5.10 dapat dipilih sebagai sel satuan. Pada reaktor yang menggunakan CP (*coated particle*) seperti HTR, bola mikro bahan bakar TRISO bahkan digunakan sebagai sel satuan.

Langkah utama untuk melakukan homogenisasi adalah dengan melakukan perhitungan distribusi fluks secara detail pada sel satuan kisi bahan bakar. Biasanya diasumsikan bahwa tidak ada arus neutron netto yang melewati batas sel. Berbagai macam tampang lintang multigrup yang mencirikan material di dalam sel kemudian dirata-rata terhadap ruang pada sel menggunakan distribusi fluks sebagai fungsi pembobot. Dengan jalan ini kita dapat menentukan sifat bahan bakar menggunakan konstanta grup efektif yang memperhitungkan distribusi fluks tak homogen di dalam sel bahan bakar. Langkah ini menggantikan sel satuan yang sebenarnya dengan unit sel homogen yang ekivalen yang dicirikan oleh tampang lintang efektif. Sebagai contoh kita bisa menggunakan sel bahan bakar tipikal, yaitu bahan bakar plus kelongsong plus pendingin. Sel bahan bakar kemudian diubah menjadi sel ekivalen dengan geometri yang lebih sederhana namun tetap mempertahankan rasio volume (lihat Gambar 5.10(a) dan 5.10(b)).

Langkah berikutnya dalam menganalisis teras adalah mempertimbangkan perangkat bahan bakar tipikal atau sekelompok perangkat bahan bakar, termasuk di dalamnya elemen kendali maupun *shim* (lihat Gambar 5.10(c)). Konstanta grup yang dihitung untuk sel bahan bakar dapat digunakan untuk mendeskripsikan sebagian besar perangkat, kecuali material kendali yang memerlkan teknik-teknik khusus. Bia-

(a) Tipikal bentuk sel satuan assembly

(b) Homogenisasi tingkat sel

(c) Homogenisasi tingkat assembly

(d) Homogenisasi tingkat teras

Gambar 5.10. *Metode homogenisasi teras reaktor.*

sanya kode difusi atau transport dua dimensi multigrup digunakan untuk menentukan fluks di perangkat bahan bakar dan kemudian fluks ini digunakan untuk membangkitkan konstanta grup rata-rata perangkat.

Langkah terakhir adalah menggunakan konstanta grup rata-rata perangkat (atau, pada perhitungan yang sangat detail, menggunakan konstanta grup sel bahan bakar) untuk menentukan distribusi fluks dan daya di keseluruhan teras. Bentuk simetri teras biasanya dapat mempermudah perhitungan dengan cara melakukan perhitungan secara detail hanya pada satu kuadran saja. Kadang-kadang dikehendaki pula untuk menghomogenisasi teras (lihat Gambar 5.10(d)).

5.2.1. Perhitungan konstanta group tingkat sel

Tampang lintang interaksi tiap group dapat dinyatakan dengan

$$\langle \Sigma_g \rangle_{sel} = \frac{\displaystyle\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{V_{sel}} \Sigma(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E)\, dV}{\displaystyle\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{V_{sel}} \phi(\mathbf{r}, E)\, dV} \tag{5.48}$$

Konstanta grup tersebut biasanya disebut dengan konstanta grup *terlindungi* (*shielded group constants*) karena memperhitungkan depresi fluks di dalam sel akibat *self-shielding*. Kita dapat memisahkan distribusi fluks untuk daerah moderator dan bahan bakar, sehingga $\langle \Sigma_g \rangle_{sel}$ dapat ditulis sebagai

$$\langle \Sigma_g \rangle_{sel} = \frac{\displaystyle V_M \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^M(E)\overline{\phi_M}(E)\, dE + V_F \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E)\overline{\phi_F}(E)\, dE}{\displaystyle V_M \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^M(E)\, dE + V_F \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E)\, dE} \tag{5.49}$$

dengan fluks rata-rata sebesar

$$\overline{\phi_M}(E) = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \phi(\mathbf{r}, E)\, dV \tag{5.50}$$

$$\overline{\phi_F}(E) = \frac{1}{V_F} \int_{V_F} \phi(\mathbf{r}, E)\, dV \tag{5.51}$$

Jika fluks neutron di dalam sel dapat dipisahkan terhadap ruang dan energi

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \phi(\mathbf{r})\psi(E) \tag{5.52}$$

maka Pers. (5.49) dapat ditulis sebagai

$$\langle \Sigma_g \rangle_{sel} = \frac{V_M \Sigma_g^M \overline{\phi_M} + V_F \Sigma_g^F \overline{\phi_F}}{V_M \overline{\phi_M} + V_F \overline{\phi_F}} \tag{5.53}$$

$$= \frac{\Sigma_g^F + \dfrac{V_M}{V_F} \Sigma_g^M \zeta}{1 + \dfrac{V_M}{V_F} \zeta} \tag{5.54}$$

dengan konstanta grup didefinisikan sebagai

$$\Sigma_g^F \equiv \frac{\displaystyle\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E) \psi(E)\, dE}{\displaystyle\int_{E_g}^{E_{g-1}} \psi(E)\, dE} \tag{5.55}$$

dengan rata-rata fluks spasial didefinisikan sebagai

$$\overline{\phi_M} = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \phi(\mathbf{R})\, dV \tag{5.56}$$

dan faktor rugi sel didefinisikan sama seperti yang telah dibahas sebelumnya

$$\zeta = \frac{\overline{\phi_M}}{\overline{\phi_F}} \tag{5.57}$$

Untuk menghitung koefisien difusi rata-rata pada sel, $\langle D \rangle_{sel}$, karena D berbanding terbalik dengan tampang lintang transport Σ_{tr} maka berlaku

$$\frac{\overline{\phi_F} V_F + \overline{\phi_M} V_M}{\langle D \rangle_{sel}} = \frac{\overline{\phi_F} V_F}{D_F} + \frac{\overline{\phi_M} V_M}{D_M} \tag{5.58}$$

dengan D_M dan D_F adalah koefisien difusi moderator dan bahan bakar.

Menyelesaikan Pers. (5.58) untuk $\langle D \rangle_{sel}$ dan membaginya dengan Σ_a (bentuk sama seperti Pers. (5.53)), akan diperoleh persamaan untuk luas difusi termal rata-rata pada sel

$$\begin{aligned} \langle L_T^2 \rangle_{sel} &= \frac{\left(\overline{\phi_F} V_F + \overline{\phi_M} V_M\right)^2}{\left[\dfrac{\overline{\phi_F} V_F}{D_F} + \dfrac{\overline{\phi_M} V_M}{D_M}\right] \left(\Sigma_a^F \overline{\phi_F} V_F + \Sigma_a^M \overline{\phi_M} V_M\right)} \\ &= (1-f) L_{TM}^2 + \frac{\left[1 + \left(\dfrac{V_F}{V_M}\right) \zeta\right]^2}{1 + \left(\dfrac{D_M}{D_F}\right)\left(\dfrac{V_F}{V_M}\right) \zeta} \end{aligned} \tag{5.59}$$

dengan L_{TM}^2 adalah luas difusi termal untuk moderator.

5.2.2. Highly-absorbing fuel

Untuk daerah tengah ("F") yang sangat menyerap neutron (misalnya pada pin bahan bakar maupun batang kendali), terdapat beberapa pendekatan yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan tampang lintang serapan rerata sel. Pendekatan ini menyatakan bahwa laju serapan yang dihitung dengan tampang lintang rerata sel efektif identik dengan laju serapan yang sesungguhnya di daerah F.

Dengan mengabaikan serapan yang terjadi pada daerah M, laju serapan sel dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{laju serapan sel} \equiv \Sigma_a^{eff}\bar{\phi}_{hom}V_{sel} = \Sigma_a^F\bar{\phi}_F V_F \tag{5.60}$$

dengan Σ_a^{eff} adalah tampang lintang serapan sel efektif dan $\bar{\phi}_{hom}$ adalah fluks rata-rata di dalam sel yang telah dihomogenisasi. Dengan demikian tampang lintang serapan efektif untuk sel adalah sebagai berikut

$$\Sigma_a^{eff} = \left(\frac{V_F}{V_{sel}}\right)\left[\frac{\bar{\phi}_F}{\bar{\phi}_{hom}}\right]\Sigma_a^F \equiv \left(\frac{V_F}{V_{sel}}\right) f_s\,\Sigma_a^F \tag{5.61}$$

dengan f_s adalah faktor *self-shielding*,

$$f_s \equiv \frac{\bar{\phi}_F}{\bar{\phi}_{hom}} \tag{5.62}$$

yang memperhitungkan depresi fluks di daerah F.

Karena $\bar{\phi}_{hom} = \dfrac{V_F}{V_{sel}}\bar{\phi}_F + \dfrac{V_M}{V_{sel}}\bar{\phi}_M$, maka

$$f_s = \frac{V_{sel}\bar{\phi}_F}{V_F\bar{\phi}_F + V_M\bar{\phi}_M} = \frac{\left(\frac{V_{sel}}{V_F}\right)}{1 + \left(\frac{V_M}{V_F}\right)\left(\frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_F}\right)} = \frac{\left(\frac{V_{sel}}{V_F}\right)}{1 + \left(\frac{V_M}{V_F}\right)\zeta} \tag{5.63}$$

Pendekatan yang lain yang dapat diterapkan pada situasi di mana daerah F sangat menyerap neutron (misal di batang kendali) adalah dengan menyamakan

$$\text{Laju serapan di sel} = V_{sel}\Sigma_a^{eff}\bar{\phi}_{hom} = S_F J_F = \text{laju di mana neutron masuk ke daerah F} \tag{5.64}$$

dengan S_F adalah luas permukaan daerah F, dan J_F adalah densitas arus neutron rerata yang masuk ke daerah yang menyerap pada permukaan tersebut. Dengan demikian

$$\Sigma_a^{eff} = \frac{S_F}{V_{sel}}\frac{J_F}{\bar{\phi}_{hom}} \tag{5.65}$$

LATIHAN

1. Teras sebuah reaktor eksperimental terdiri dari batang uranium alam yang tersusun sebagai kisi segiempat dan berada di dalam matriks grafit. Batang bahan bakar tersebut mempunyai jari-jari 1,02 cm dengan *pitch* 25,4 cm.

   Hitunglah nilai f dan p untuk reaktor tersebut.

2. Sebuah kisi heterogen berisi batang uranium dengan pengkayaan 5% dan air. Diameter batang bahan bakar adalah 1.5 cm dan *pitch* sebesar 2,8 cm. Hitunglah:

   (a) jari-jari ekivalen sel

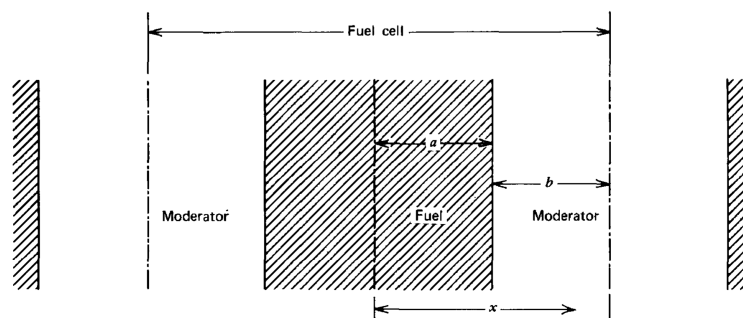
   (b) rasio volume uranium-air, V_F/V_M

   (c) faktor penggunaan termal

   (d) probabilitas lolos resonansi

   (e) faktor fisi cepat

   (f) k_∞

3. Hitunglah faktor rugi termal, ζ, yang sesuai dengan geometri papan dua daerah terdiri dari daerah bahan bakar dengan tebal $2a$ dan diselimuti oleh daerah moderator dengan tebal b. Gunakan teori difusi satu grup.

Bab 6

Perilaku Reaktor Gayut Waktu

I learned very early the difference between knowing the name of something and knowing something.
RICHARD FEYNMAN

Learning outcomes :

- Mampu menurunkan persamaan kinetika reaktor tanpa dan dengan neutron kasip.
- Mampu menyelesaikan kinetika reaktor titik pada berbagai kondisi reaktor (subkritis, kritis, superkritis) terhadap input yang berbeda.
- Mampu mengidentikasi perilaku dinamis reaktor.

Minggu ke : 8 dan 9

REAKTOR pada bab-bab sebelumnya telah dianalisis dengan menggunakan faktor perlipatan sebagai nilai diri (*eigenvalue*) dan dengan menggunakan faktor tersebut kita gunakan persamaan *steady-state*. Pada bab ini, akan dipelajari bagaimana fluks neutron akan berubah apabila nilai k_{eff} tidak sama dengan satu. Nilai k_{eff} dapat berubah sebagai contoh dengan menggerakkan batang kendali masuk atau keluar dari teras reaktor. Ketika menyalakan reaktor, orang menggunakan cara ini untuk menaikkan fluks neutron dan daya. Di sini kita berbicara tentang kinetika reaktor dalam "domain detik". Ketika reaktor membangkitkan daya yang cukup, suhu reaktor akan berubah sebagai fungsi daya. Pengaruhnya akan dipelajari secara kualitatif. Selama operasi reaktor komposisi bahan bakar nuklir juga akan berubah secara perlahan sebagai akibat dari:

1. konsumsi bahan bakar (*burnup*)

2. pembentukan bahan bakar nuklir baru dari konversi bahan fertil
3. pembentukan produk fisi

Jika kita ingin mempertahankan produksi energi yang konstan, kita perlu mengkompensasi pengaruh dari perubahan komposisi tersebut. Dua pengaruh yang pertama berlangsung dalam skala waktu bulan atau tahun. Pengaruh dari produk fisi, yang mengakibatkan serapan neutron, dapat dibedakan menjadi:

1. pengaruh peracunan xenon dan samarium, yang muncul dalam skala waktu jam atau hari
2. pembentukan produk fisi yang berumur panjang maupun stabil secara bertahap dalam skala waktu bulan atau tahun.

6.1. Deskripsi Sederhana Kinetika Reaktor

Kita dapat memperoleh penyelesaian persamaan difusi gayut waktu

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r},t) + \nu\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) \tag{6.1}$$

dengan mengasumsikan bahwa reaktor mempunyai komposisi yang homogen dan kegayutan terhadap ruang dan waktu dapat dipisahkan:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \phi(t)\psi(\mathbf{r}) \tag{6.2}$$

Dengan mensubstitusi Pers. (6.2) ke Pers. (6.1), bagian gayut waktu $\psi(\mathbf{r})$ memenuhi persamaan nilai diri

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + B_g^2\psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{6.3}$$

Untuk bagian gayut waktu kemudian kita dapat menuliskan sebagai

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi}{dt} = -DB_g^2\phi(t) + \nu\Sigma_f\phi(t) - \Sigma_a\phi(t) \tag{6.4}$$

Kita dapat mendefinisikan umur hidup neutron (*neutron lifetime*) l sebagai waktu rerata antara munculnya neutron bebas dan hilangnya akibat serapan atau bocoran. Untuk medium yang tak hingga besar sehingga tidak ada bocoran, umur neutron l_∞ menjadi rasio antara jarak bebas rerata (*mean free path*) serapan dengan kecepatannya:

$$l_\infty = \frac{\lambda_a}{v} = \frac{1}{v\Sigma_a} \tag{6.5}$$

Pada reaktor dengan dimensi yang terbatas, akan terjadi bocoran, sehingga umur hidup neutron l_∞ harus dikalikan dengan probabilitas tidak bocor P_{NL}

$$l = l_\infty P_{NL} = \frac{1}{v\Sigma_a\left(1 + B_g^2L^2\right)} \tag{6.6}$$

Sekarang kita dapat menulis ulang Pers. (6.4) sebagai

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= v\Sigma_a \left\{ \nu\Sigma_f/\Sigma_a - \left(1 + B_g^2 L^2\right) \right\} \phi(t) \\ &= v\Sigma_a \left(1 + B_g^2 L^2\right) \left(k_{eff} - 1\right) \phi(t) \\ &= \frac{k_{eff} - 1}{l} \phi(t) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Kita dapat memperoleh penurunan persamaan ini dengan memperkenalkan konsep generasi neutron. Satu generasi neutron "hidup" selama l, kemudian hilang dan menghasilkan generasi yang baru. Kita dapat mengartikan k_{eff} sebagai rasio antara banyaknya neutron pada dua generasi yang berurutan. Jika pada saat tertentu terdapat N neutron, maka pada generasi berikutnya akan terdapat $k_{eff}N$ neutron dan semua neutron pada generasi sebelumnya telah lenyap. Karena peristiwa ini terjadi pada rentang waktu l, berlaku hubungan berikut ini untuk perubahan banyaknya neutron per satuan waktu:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_{eff}N - N}{l} = \frac{k_{eff} - 1}{l} N(t) \tag{6.8}$$

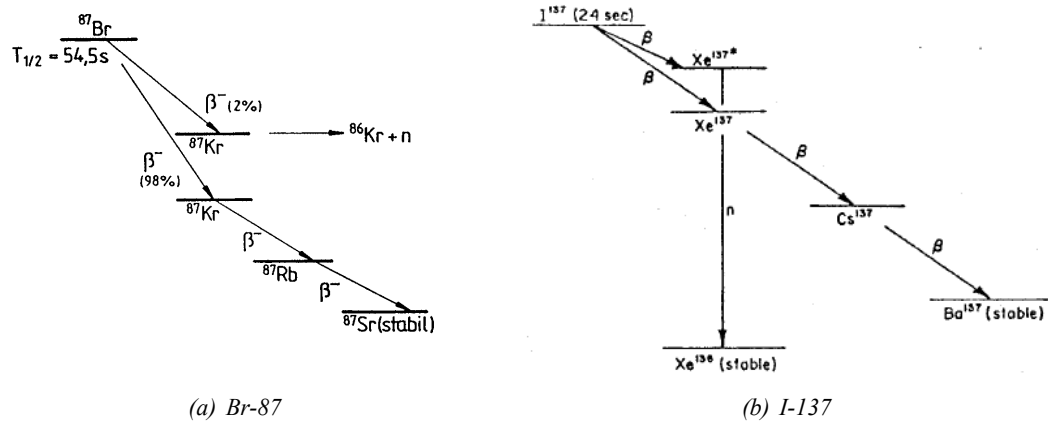
Dikarenakan fluks sebanding dengan banyaknya neutron, persamaan ini berhubungan dengan Pers. (6.7). Penyelesaiannya adalah

$$N(t) = N_0 \exp\left[\frac{k_{eff} - 1}{l} t\right] \tag{6.9}$$

dengan N_0 adalah banyaknya neutron pada $t = 0$. Untuk $k_{eff} = 1$ kita mendapatkan populasi neutron yang stasioner. Jika $k_{eff} \neq 1$, banyaknya neutron akan bertambah atau berkurang secara eksponensial terhadap waktu.

Kisaran nilai untuk umur neutron l pada reaktor termal adalah $10^{-4} - 10^{-3}$ detik. Pada reaktor cepat, umur neutron akan lebih pendek karena meskipun nilai Σ_a lebih kecil, kecepatan rerata v jauh lebih besar daripada reaktor termal. Pada reaktor jenis ini, nilai l berkisar antara $10^{-7} - 10^{-6}$ detik. Kita dapat dengan mudah menghitung bahwa untuk reaktor termal dengan $k_{eff} = 1,001$ dan $l = 10^{-4}$ detik, daya akan meningkat setiap detiknya sebesar $e^{10} = 22000$ kali. Reaktor dengan respon semacam ini terhadap perubahan kecil k_{eff} tentunya akan sulit untuk dikendalikan. Untungnya terdapat bagian dari reaksi fisi yang akan membantu, yaitu *neutron kasip* (*delayed neutron*).

6.2. Neutron Kasip

Tidak semua neutron akan dihasilkan pada waktu yang sama setelah terjadi reaksi fisi. Hampir 99% dari semua neutron dihasilkan secara serentak (dalam rentang waktu 10^{-13} detik) setelah kejadian fisi. Neutron-neutron ini disebut dengan *neutron serentak* atau *prompt neutrons*. Neutron selebihnya dihasilkan setelah peluruhan produk fisi. Neutron-neutron ini disebut dengan *neutron kasip* atau *delayed neutrons*. Neutron-neutron tersebut dihasilkan setelah peluruhan beta fragmen fisi, yang disebut dengan *prekursor neutron kasip*. Meskipun neutron kasip hanya sejumlah kecil saja dari total neutron yang ada pada reaktor, akan tetapi mereka mempunyai peran yang sangat penting pada pengendalian reaktor.

(a) Br-87 *(b) I-137*

Gambar 6.1. *Skema peluruhan prekursor neutron kasip. (a) Br-87. (b)I-137*

Emisi neutron kasip lebih meningkat apabila energi ikat neutron yang dilepaskan adalah minimum. Sebagai contoh adalah Br-87 dan I-137, seperti pada Gambar 6.1. Adanya keterlambatan dalam emisi neutron ini ditentukan oleh konstanta peluruhan beta, yang bervariasi antara sepersekian detik sampai puluhan detik. Probabilitas untuk emisi neutron kasip adalah sekitar 1% atau lebih kecil per fisi atau per neutron fisi serentak. Sebagai contoh, waktu peluruhan sebesar 55,72 detik berkaitan dengan umur paro Br-87 (lihat Gambar 6.1) dan menentukan kelompok peluruhan yang pertama. Serupa dengan Br-87, peluruhan I-137 yang diikuti dengan emisi neutron setelah 2,72 detik menentukan grup kedua. Secara keseluruhan, biasanya digunakan enam grup neutron kasip (lihat Tabel 6.1 - 6.3).

Neutron kasip dicirikan dengan nilai *yield*-nya, yaitu β_i, relatif terhadap banyaknya neutron total per fisi serta konstanta peluruhannya, λ_i. *Yield* neutron kasip total per fisi (β) tergantung kepada jenis bahan bakar yang digunakan di dalam reaktor serta energi neutron yang menyebabkan reaksi fisi. Nilai tersebut didefinisikan sebagai

$$\beta = \sum_{i=1}^{6} \beta_i \tag{6.10}$$

Karena per definisi, nilai β menyatakan rasio neutron kasip terhadap banyaknya neutron total per fisi, maka nilai β dapat pula dinyatakan sebagai

$$\beta = \frac{\nu_d}{\nu} \tag{6.11}$$

dengan ν_d adalah banyaknya neutron kasip yang dihasilkan per fisi dan ν adalah banyaknya neutron total yang dihasilkan per fisi.

Neutron kasip tidak mempunyai sifat-sifat yang sama seperti neutron serentak yang dihasilkan secara langsung dari reaksi fisi. Energi rata-rata neutron serentak adalah sekitar 2 MeV yang jelas lebih besar daripada energi rata-rata neutron kasip sebesar 0,5 MeV. Gambar 6.2 menampilkan perbedaan spektrum kedua jenis neutron tersebut. Kenyataan ini mempunyai konsekuensi yang penting dalam siklus hidup neutron:

1. Neutron kasip mempunyai probabilitas yang lebih rendah untuk menghasilkan fisi cepat daripada neutron serentak karena energinya yang lebih rendah daripada nilai minimum yang diperlukan agar terjadi reaksi fisi cepat.

2. Neutron kasip lebih mudah untuk ditermalisasi karena dengan energi yang lebih rendah maka banyaknya tumbukan dengan material moderator yang diperlukan agar menjadi neutron termal menjadi lebih sedikit.

3. Neutron kasip mempunyai probabilitas yang lebih rendah untuk bocor keluar dari teras ketika mereka berada pada rentang energi cepat, karena mereka dilahirkan dengan energi yang lebih rendah sehingga mereka bergerak pada jarak yang lebih pendek daripada neutron cepat.

Pada Tabel 6.3 disajikan dua jenis pembobotan untuk mendapatkan nilai konstanta peluruhan rata-rata. Besaran $\frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\beta}\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}$ disebut dengan waktu peluruhan rata-rata terboboti kelimpahan (*abundance-weighted mean decay time*) dan besaran $\bar{\lambda}' = \frac{1}{\beta}\sum_i \beta_i\lambda_i$ disebut dengan konstanta peluruhan rata-rata terboboti kelimpahan (*abundance-weighted mean decay constant*). Kedua besaran $\bar{\lambda}$ dan $\bar{\lambda}'$ nanti akan digunakan sebagai konstanta peluruhan efektif untuk neutron kasip satu kelompok. Besaran $\bar{\lambda}$ cocok untuk kondisi dengan perubahan densitas neutron yang lambat, sementara besaran $\bar{\lambda}'$ cocok untuk kondisi dengan perubahan densitas neutron yang sangat cepat.

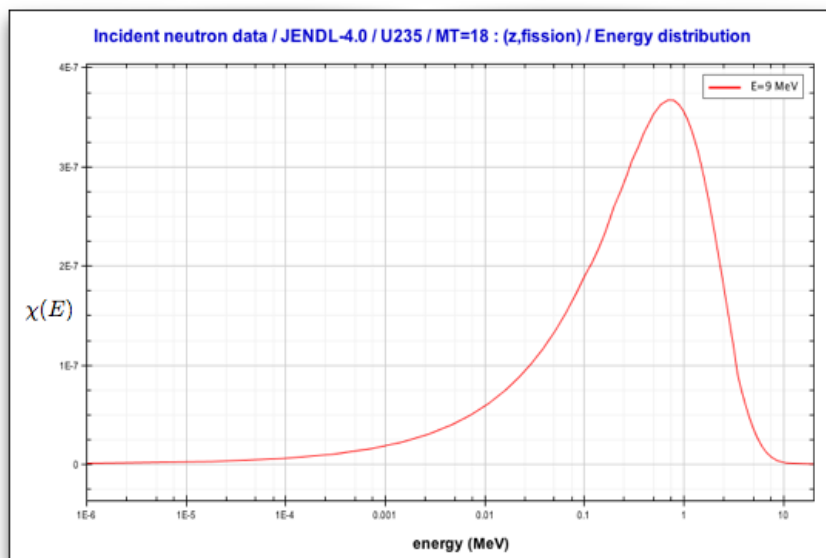
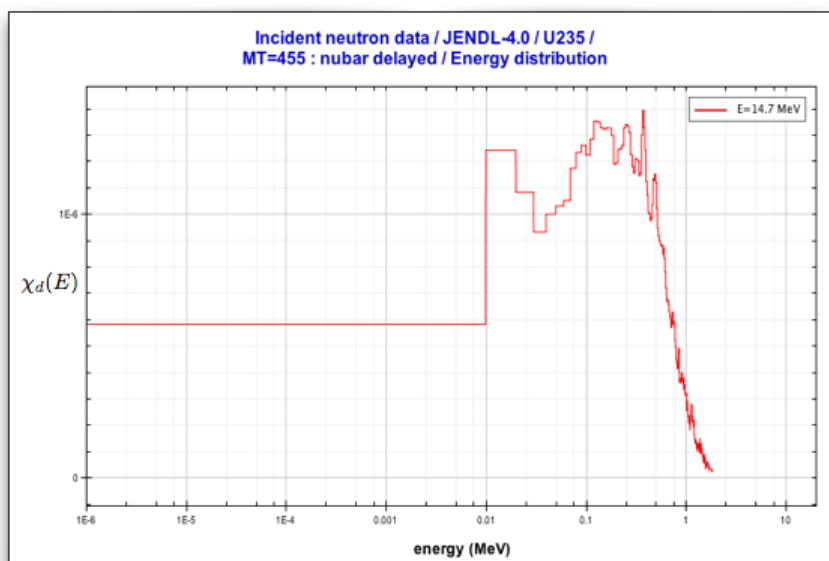
Untuk nilai k_{eff} yang tidak terlalu besar, neutron-neutron kasip ini menyebabkan "umur hidup efektif" neutron menjadi lebih besar daripada umur hidup yang sebenarnya sebagai akibat "kelahiran yang tertunda" sebagian neutron. Pendekatan pertama umur neutron efektif ini adalah sebesar

$$l_{eff} = \sum_i \beta_i t_i + l \tag{6.12}$$

dengan β_i adalah fraksi neutron kasip pada kelompok ke-i, t_i adalah waktu rerata antara fisi dan dilepaskannya neutron kelompok ke-i, di mana berlaku:

$$t_i = \frac{\int_0^\infty t\, e^{-\lambda_i t}\, dt}{\int_0^\infty e^{-\lambda_i t}\, dt} = \frac{1}{\lambda_i} \tag{6.13}$$

Dari Tabel 6.1 dapat dihitung bahwa $\sum_i \beta_i t_i \approx 0,1$ detik untuk U-235, karena nilai l jauh lebih kecil, l_{eff} ditentukan sepenuhnya oleh neutron kasip. Menggunakan perhitungan yang sama seperti pada contoh sebelumnya, sekarang kita dapat menghitung *periode reaktor* (yaitu waktu yang dibutuhkan agar daya reaktor naik sebesar e kali) sebesar $T = 10^{-1}/10^{-3} = 100$ detik. Sekarang reaktor menjadi mudah dikendalikan. Secara umum, reaktor dinyalakan dengan periode sebesar 30 detik atau lebih besar. Apabila periode menjadi lebih kecil (dengan membuat k_{eff} lebih kecil), daya meningkat terlalu cepat untuk dapat memastikan penyalaan yang handal dari sudut pandang teknis maupun keselamatan.

Meskipun parameter enam grup neutron kasip masih memenuhi kebutuhan pengoperasian reaktor, seringkali diperlukan pula informasi *yield* neutron kasip yang lebih akurat dan resolusi energi neutron kasip yang lebih bagus. Penggunaan struktur enam kelompok sudah ditengarai tidak mampu mencer-

(a) Neutron serentak

(b) Neutron kasip

Gambar 6.2. *Spektrum energi neutron serentak dan kasip.*

Tabel 6.1. *Data neutron kasip untuk fisi termal.*

Bahan Bakar	Grup ke-i	$T_{1/2}$ (s)	λ_i (s^{-1})	β_i/β	$\nu_{d,i}$
U^{235}	1	55,72	0,0124	0,033	0,00052
	2	22,72	0,0305	0,219	0,00346
	3	6,22	0,1114	0,196	0,00310
	4	2,30	0,3014	0,395	0,00624
	5	0,610	1,1363	0,115	0,00182
	6	0,230	3,0137	0,042	0,00006
	Total			1,000	0,0158
Pu^{239}	1	54,28	0,0128	0,035	0,00021
	2	23,04	0,0301	0,298	0,00182
	3	5,60	0,1238	0,211	0,00129
	4	2,13	0,3254	0,326	0,00199
	5	0,618	1,1216	0,086	0,00052
	6	0,257	2,6971	0,044	0,00027
	Total			1,000	0,00610
U^{233}	1	55,00	0,0126	0,086	0,00057
	2	20,57	0,0337	0,299	0,00197
	3	5,00	0,1386	0,252	0,00166
	4	2,13	0,3254	0,278	0,00184
	5	0,615	1,1271	0,051	0,00034
	6	0,277	2,5023	0,034	0,00022
	Total			1,000	0,00660

Tabel 6.2. *Data neutron kasip untuk fisi cepat.*

Bahan Bakar	Grup ke-i	$T_{1/2}$ (s)	λ_i (s^{-1})	β_i/β	$\nu_{d,i}$
U^{235}	1	54,51	0,0127	0,038	0,00063
	2	21,84	0,0317	0,213	0,00351
	3	6,00	0,1155	0,188	0,00310
	4	2,23	0,3108	0,407	0,00672
	5	0,496	1,3975	0,128	0,00211
	6	0,179	3,8723	0,026	0,00043
	Total			1,000	0,0165
Pu^{239}	1	53,75	0,0129	0,038	0,00024
	2	22,29	0,0311	0,280	0,00176
	3	5,19	0,1336	0,216	0,00136
	4	2,09	0,3316	0,328	0,00207
	5	0,549	1,2626	0,103	0,00065
	6	0,216	3,2090	0,035	0,00022
	Total			1,000	0,00630
U^{233}	1	55,11	0,0126	0,086	0,00060
	2	20,74	0,0334	0,274	0,00192
	3	5,30	0,1308	0,227	0,00159
	4	2,29	0,3027	0,317	0,00222
	5	0,546	1,2695	0,073	0,00051
	6	0,221	3,1364	0,023	0,00016
	Total			1,000	0,00700

Tabel 6.3. *Fraksi neutron kasip dan konstanta peluruhan rata-rata terboboti.*

Energi neutron efektif	Bahan bakar	ν_d	ν	β	$\bar{\lambda}$ $\left(\frac{1}{\beta}\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}\right)^{-1}$ (s^{-1})	$\bar{\lambda}'$ $\frac{1}{\beta}\sum_i \beta_i\lambda_i$ (s^{-1})
Termal	U^{235}	0,0158	2,432	0,00650	0,0767	0,405
	Pu^{239}	0,0061	2,874	0,00212	0,0648	0,356
	U^{233}	0,0066	2,482	0,00266	0,0543	0,279
1,45 MeV	U^{235}	0,0165	2,57	0,00642	0,0784	0,435
1,58 MeV	Pu^{239}	0,0063	3,09	0,00204	0,0683	0,389
1,45 MeV	U^{233}	0,0070	2,62	0,00267	0,0559	0,300

minkan konstanta waktu asimtotik secara akurat terutama yang terkait dengan prekursor berumur paling panjang, yaitu ^{87}Br, ^{137}I dan ^{88}Br. Model ini tidak mencukupi terutama untuk kasus reaktor epitermal, karena selama ini pengukuran aktivitas neutron kasip semuanya dilakukan untuk fisi yang dihasilkan dari neutron cepat atau neutron termal. Pada kasus reaktor cepat, di mana fisi nuklir pada enam isotop-isotop dapat belah uranium dan plutonium adalah penting, maka akurasi dan resolusi energi memegang peran penting.

Untuk mengurangi perbedaan antara data terukur dan nilai-nilai skala reaktivitas yang dihitung berdasarkan pada kinetika reaktor, direkomendasikan untuk menggunakan **delapan grup** neutron kasip. Tampaknya masuk akal untuk menambah jumlah grup neutron kasip karena dari banyak studi ditunjukkan bahwa sebagian besar neutron kasip dihasilkan oleh dua belas prekursor yang umum dihasilkan dari semua isotop yang membelah. Tiga kelompok pertama dari model delapan grup neutron kasip merepresentasikan tiga prekursor dominan yang burumur panjang. Tabel 6.4 menampilkan parameter-parameter model delapan grup neutron kasip untuk fisi termal pada ^{235}U.

Tabel 6.4. *Umur paro dan fraksi relatif pada model delapan grup neutron kasip untuk fisi termal pada ^{235}U.*

Grup i	Energi rata-rata (MeV)	$T_{1/2}$ (s)	β_i/β
1	0,211	55,6	0,033
2	0,612	24,5	0,154
3	0,269	16,3	0,091
4	0,441	5,21	0,197
5	0,516	2,37	0,331
6	0,512	1,040	0,090
7	0,616	0,424	0,081
8	0,619	0,195	0,023

6.3. Kinetika Reaktor dengan Neutron Kasip

Untuk mendeskripsikan perilaku reaktor gayut waktu yang lebih akurat, produksi neutron akibat peluruhan prekursor harus diikutsertakan. Hal ini berarti bahwa pada persamaan neraca neutron (Pers. (6.1)) suku produksi $\nu\Sigma_f\phi$ harus diganti dengan produksi neutron serentak, yang mana lebih kecil dengan faktor sebesar $1-\beta$. Di samping itu neutron yang dilepaskan dari peluruhan prekursor harus ditambahkan. Jika konsentrasi prekursor neutron kasip kelompok ke-i dinyatakan dengan C_i, persamaan menjadi

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla\cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a\phi(\mathbf{r},t) + (1-\beta)\nu\Sigma_f\phi(\mathbf{r},t) + \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r},t) + S \qquad (6.14)$$

Persamaan untuk prekursor ditentukan oleh pembentukan inti-inti tersebut karena fisi dan oleh peluruhannya

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \beta_i \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \qquad i = 1, \ldots, 6 \tag{6.15}$$

Sekali lagi, dengan mengasumsikan pemisahan kegayutan terhadap ruang dan waktu, juga untuk konsentrasi prekursor, Pers. (6.14) dapat kita ringkas menjadi

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi}{dt} = \frac{k(1-\beta)-1}{l}\frac{1}{v}\phi(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) + S \tag{6.16}$$

Sebelum kita lanjutkan, ada dua buah variabel baru yang perlu kita perkenalkan, yaitu *average neutron generation time*, Λ, dan *reaktivitas*, ρ.

Neutron generation time didefinisikan sebagai waktu rata-rata yang diperlukan untuk menghasilkan satu buah neutron pada generasi berikutnya. Relasi antara *generation time* dengan *lifetime* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\Lambda = \frac{l}{k} \tag{6.17}$$

Reaktivitas dapat dinyatakan berdasar relasi sebagai berikut

$$\rho = \frac{k-1}{k} \tag{6.18}$$

Dengan kata lain, reaktivitas menyatakan ukuran bergesernya tingkat kritikalitas reaktor. Reaktivitas dapat dinyatakan dengan satuan %, per mill (10^{-3}), pcm (10^{-5}), mk (milli k = 10^{-3}) atau dollar (\$). Reaktivitas sebesar satu dollar akan terjadi apabila $\rho = \beta$.

Terkait dengan tingkat kritikalitas reaktor, nilai ρ menyatakan sebagai berikut:

$$\rho = \begin{cases} \text{negatif}, & k < 1, \quad \text{subkritis} \\ 0, & k = 1, \quad \text{kritis} \\ \text{positif}, & k > 1, \quad \text{superkritis} \end{cases} \tag{6.19}$$

Selanjutya dengan mengubah persamaan 6.16 ke dalam bentuk densitas neutron $n = \phi/v$ dan menggunakan *generation time* serta reaktivitas, kita mendapatkan persamaan kinetika

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) + S \tag{6.20}$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \qquad i = 1, \ldots, 6 \tag{6.21}$$

Untuk saat ini kita anggap tidak ada sumber neuron eksternal pada reaktor. Sistem persamaan diferensial orde satu dapat diselesaikan menggunakan transformasi Laplace atau dengan mencoba bentuk

penyelesaian

$$n(t) = n_0\, e^{\omega t} \tag{6.22}$$

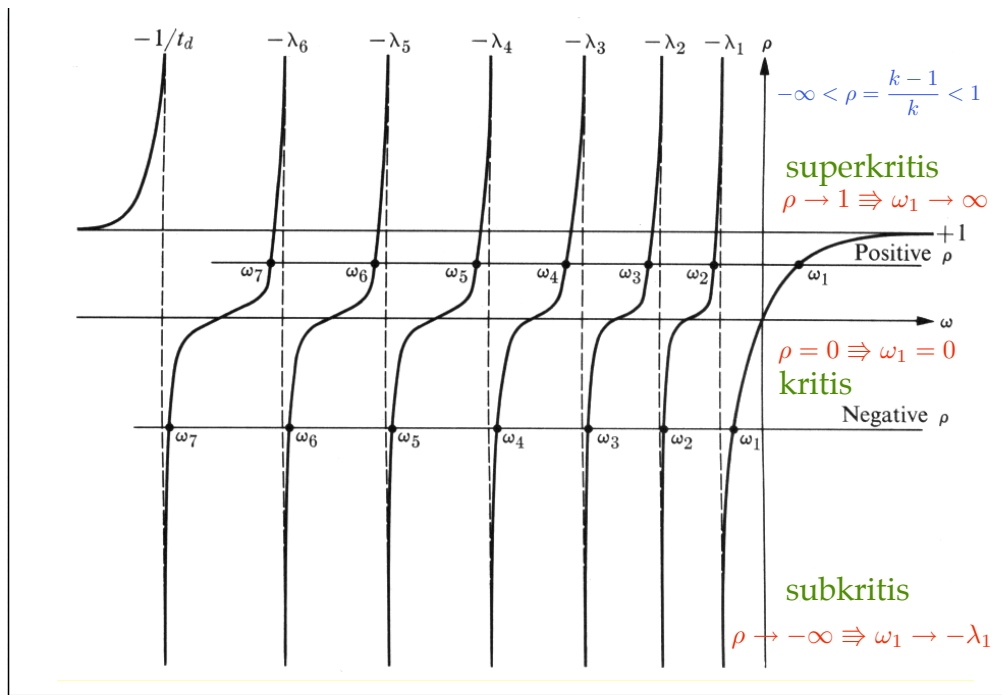
$$C_i(t) = C_{i0}\, e^{\omega t} \tag{6.23}$$

Substitusi kedua persamaan ke Pers. (6.21) memberikan hubungan antara koefisien-koefisien densitas neutron dengan prekursor

$$C_{i0} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i} n_0 \tag{6.24}$$

Substitusi ke Pers. (6.20) akan menghasilkan persamaan untuk ω yang dapat ditulis sebagai berikut

$$\rho = \omega\Lambda + \sum_i \frac{\omega\beta_i}{\omega + \lambda_i} \tag{6.25}$$

Persamaan (6.25) dikenal sebagai **Persamaan inhour**, karena ω pada awalnya ditentukan dalam *inverse hour*. Untuk nilai reaktivitas ρ tertentu, nilai ω yang terkait dapat ditentukan dari persamaan ini. Gambar 6.3 menunjukkan hubungan secara grafis antara ρ dengan ω. Dari gambar ini tampak bahwa untuk nilai ω tertentu terdapat tujuh buah penyelesaian untuk ω.

Gambar 6.3. *Bentuk grafis dari persamaan inhour*

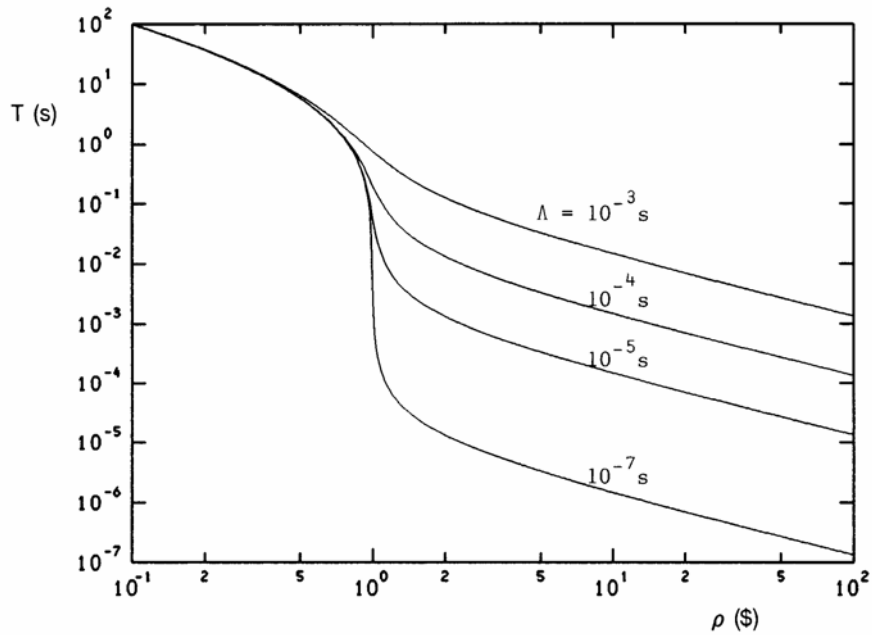
Karena terdapat lebih dari satu penyelesaian untuk ω menunjukkan bahwa densitas neutron sebagai penyelesaian persamaan kinetika dapat ditulis sebagai

$$n(t) = A_0 e^{\omega_0 t} + A_1 e^{\omega_1 t} + \ldots + A_6 e^{\omega_6 t} \tag{6.26}$$

Penyelesaian yang serupa juga dapat kita peroleh untuk konsentrasi prekursor. Koefisien-koefisien A_i ditentukan oleh syarat awal.

Dari ketujuh akar untuk ω, enam akar selalu bernilai negatif, jadi akar-akar tersebut menyatakan fenomena transisi. Akar dengan nilai terbesar (ω_0 bernilai positif untuk $\rho > 0$ dan negatif untuk $\rho < 0$. Akar ini menggambarkan respons reaktor yang berlangsung setelah fenomena transisi berakhir. Daya reaktor kemudian naik atau turun dengan *periode reaktor stabil* yang dinyatakan dengan

$$T = \frac{1}{\omega_0} \tag{6.27}$$

Reaktivitas sebuah reaktor biasanya dinyatakan dalam satuan dollar, di mana $\rho(\$) = \rho/\beta$. Apabila reaktivitas lebih besar daripada satu dollar, hanya neutron serentak yang mengakibatkan keadaan superkritis. Reaktor kemudian berada pada keadaan superkritis serentak (*prompt supercritical*) dan periode reaktor stabil menjadi sangat pendek. Situasi semacam ini harus dihindari.

Gambar 6.4. *Periode reaktor stabil sebagai fungsi reaktivitas untuk beberapa nilai waktu generasi.*

Gambar 6.4 menunjukkan periode reaktor sebagai fungsi dari ρ untuk sejumlah nilai waktu generasi neutron Λ. Kita dapat melihat bahwa untuk reaktivitas di bawah \$ 0,5, periode stabil tidak tergantung kepada waktu generasi neutron.

6.4. Pendekatan satu kelompok efektif neutron kasip

Untuk memperoleh gambaran yang lebih mendalam tentang perilaku kinetika reaktor, kita dapat menyederhanakan persamaan kinetika dengan mengasumsikan bahwa semua neutron kasip digabung men-

jadi satu kelompok dengan umur paro λ yang sesuai. Persamaan inhour (Pers. (6.25) menjadi

$$\rho = \omega\Lambda + \frac{\omega\beta}{\omega + \lambda} \tag{6.28}$$

di mana λ dipilih sedemikian rupa sehingga untuk nilai ω yang kecil (yaitu $|\omega| < \lambda_i$ untuk semua i) penyelesaian Pers. (6.28) mendekati solusi dari Pers. (6.25). Untuk nilai ω yang kecil, Pers. (6.25) menjadi

$$\rho = \omega\Lambda + \omega\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \tag{6.29}$$

dan dengan membandingkannya dengan Pers. (6.28), untuk nilai ω yang kecil berlaku

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\beta}\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \tag{6.30}$$

Nilai λ yang dihitung dengan cara ini juga ditampilkan pada Tabel 6.1 untuk sejumlah bahan bakar nuklir. Persamaan *inhour* sekarang menjadi persamaan orde dua

$$\Lambda\omega^2 + (\beta - \rho + \lambda\Lambda)\omega - \rho\lambda = 0 \tag{6.31}$$

Kecuali untuk kasus $\rho \approx \beta$, suku $\lambda\Lambda$ dapat diabaikan terhadap $\beta - \rho$. Jika kita hanya membatasi untuk nilai ρ yang kecil, maka kita akan mendapatkan penyelesaian dengan satu nilai ω yang kecil dan satu nilai yang (negatif) besar. Kedua nilai ini dapat didekati dengan

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\beta\lambda}{\beta - \rho} \\ \omega_1 &= -\frac{\beta - \rho}{\Lambda} \end{aligned} \tag{6.32}$$

sehingga penyelesaian umum dari persamaan kinetika menjadi

$$n(t) = A_0 e^{\frac{\rho\lambda}{\beta-\rho}t} + A_1 e^{-\frac{\beta-\rho}{\Lambda}t} \tag{6.33}$$

Untuk reaktor kritis di mana penambahan reaktivitas berbentuk undak berlangsung pada saat $t = 0$, kita harus mengeset syarat batas berikut ini

$$n(0) = n_0 = A_0 + A_1 \tag{6.34}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{dn}{dt} = \frac{\rho}{\Lambda} n_0 \tag{6.35}$$

Syarat terakhir ini berasal dari Pers. (6.20) di mana $n(t)$ dan $C(t)$ harus kontinyu pada $t = 0$. Nilai kondisi mantap untuk C_i dapat diperoleh dari Pers. (6.21) dengan membuat derivatif sama dengan nol, sehingga

$$C_{i0} = \frac{\beta_i}{\Lambda\lambda_i} n_0 \tag{6.36}$$

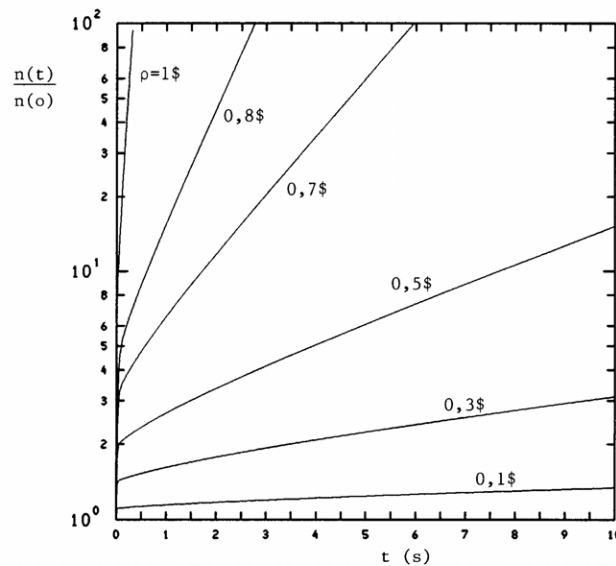
Dengan demikian penyelesaian persamaan kinetika menjadi

$$n(t) = n_0 \left[\frac{\beta}{\beta - \rho} e^{\frac{\rho\lambda}{\beta-\rho}t} - \frac{\rho}{\beta - \rho} e^{-\frac{\beta-\rho}{\Lambda}t} \right] \tag{6.37}$$

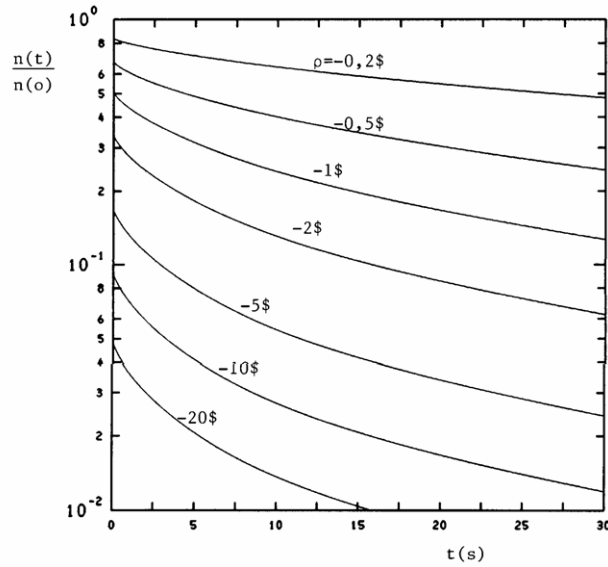
dan konsentrasi prekursor dapat diperoleh sebagai berikut

$$C(t) = n_0 \left[\frac{\beta}{\Lambda\lambda} e^{\frac{\rho\lambda}{\beta-\rho}t} - \frac{\rho\beta}{(\beta - \rho)^2} e^{-\frac{\beta-\rho}{\Lambda}t} \right] \tag{6.38}$$

Setelah penambahan reaktivitas positif, daya reaktor meningkat hampir seketika dengan faktor $\beta/(\beta-\rho)$ yang biasa dikenal sebagai *prompt jump*. Karena suku kedua berkurang dengan sangat cepat, daya akan naik secara perlahan dengan periode reaktor sebesar $(\beta - \rho)/\rho\lambda$. Oleh karena itu periode stabil reaktor ditentukan oleh neutron kasip, sementara kemiringan dari kurva *prompt jump* ditentukan oleh waktu generasi neutron serentak.

Gambar 6.5 dan 6.6 menggambarkan fluks sebagai fungsi waktu untuk penambahan reaktivitas positif maupun negatif. Sebagai contoh, kita dapat melihat setelah penambahan sebesar \$0,3, fluks akan meningkat hampir seketika sebesar kira-kira 40% dan akan meningkat lagi dengan periode yang relatif panjang ($\approx$ 30 detik).

Gambar 6.5. *Respons reaktor setelah penambahan reaktivitas undak yang positif*

Untuk $\rho > \beta$, suku kedua pada Pers. (6.37) menghasilkan kontribusi positif yang meningkat secara cepat sebagai konsekuensi umur generasi Λ yang singkat, atau reaktor berada pada kondisi superkritis serentak (*prompt supercritical*).

Secara fisis, *prompt jump* dapat dipahami dengan kaitannya terhadap multiplikasi neutron. Multiplikasi M dapat dipahami sebagai rata-rata banyaknya neutron total pada generasi yang berurutan setelah

Gambar 6.6. *Respons reaktor setelah penambahan reaktivitas undak yang negatif*

memasukkan satu buah neutron ke dalam sistem

$$M = 1 + k_{eff} + k_{eff}^2 + \ldots = \frac{1}{1 - k_{eff}} \tag{6.39}$$

Tentu saja kuantitas ini hanya mempunyai arti apabila $k_{eff} < 1$, jadi untuk sistem yang subkritis. Untuk reaktor yang bukan superkritis serentak, kita dapat mendefinisikan multiplikasi serentak (*prompt multiplication*), yaitu multiplikasi yang dihasilkan dari neutron serentak saja:

$$\begin{aligned} M &= 1 + k_{eff}(1-\beta) + k_{eff}^2(1-\beta)^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - k_{eff}(1-\beta)} = \frac{1}{k_{eff}} \frac{1}{\beta - \rho} \approx \frac{1}{\beta - \rho} \end{aligned} \tag{6.40}$$

Multiplikasi serentak untuk reaktor kritis ($\rho = 0$) adalah $1/\beta$, yang mana untuk reaktor dengan U-235 sebagai bahan bakar nilainya adalah sekitar 150. Ini artinya bahwa rata-rata setiap neutron akan menghasilkan rantai 150 neutron. Setelah rantai ini habis dalam waktu singkat karena waktu generasi Λ yang kecil, pelepasan neutron kasip diperlukan untuk mengawali rantai yang baru. Setelah perubahan reaktivitas, multiplikasi serentak diberikan oleh Pers. (6.40) sehingga multiplikasi serentak naik atau turun dengan faktor $\beta/(\beta - \rho)$.

Ketika reaktivitas negatif yang besar diberikan kepada reaktor, misalnya pada saat memadamkan reaktor dengan memasukkan semua batang kendali ke dalam teras, periode stabil reaktor hampir sama besar dengan kebalikan konstanta peluruhan kelompok neutron kasip berumur paling panjang, yaitu sekitar 80 detik, seperti yang ditampilkan pada Gambar 6.3.

6.5. Pendekatan *Prompt Jump*

Untuk nilai $\Lambda \to 0$ dan $\rho < \beta$, suku pertama pada persamaan densitas neutron akan menjadi negatif besar. Dengan demikian selisih antara $\frac{\rho - \beta}{\Lambda}$ dengan $\sum_i \lambda_i c_i + q$ menjadi kecil. Dengan kata lain, kita bisa menganggap turunan terahdap waktu dapat diabaikan. Pendekatan *prompt jump* berangkat dari asumsi semacam ini, dan persamaan kinetika dapat dituliskan sebagai

$$0 = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i + q \tag{6.41}$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \tag{6.42}$$

Untuk satu kelompok neutron kasip, Pers. (6.41) menjadi

$$[\rho(t) - \beta]\, n(t) + \Lambda\lambda c + \Lambda q = 0 \tag{6.43}$$

atau

$$\lambda c = \frac{\beta - \rho(t)}{\Lambda} - q \tag{6.44}$$

Dengan mensubstitusi Pers. (6.44) ke Pers. (6.42) diperoleh

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\rho(t)}{\Lambda} n + q \tag{6.45}$$

Selanjutnya kita turunkan Pers. (6.43) menjadi

$$[\rho(t) - \beta]\, \frac{dn}{dt} + n(t)\frac{d\rho}{dt} + \Lambda\lambda\frac{dc}{dt} + \Lambda\frac{dq}{dt} = 0 \tag{6.46}$$

Jika kita substitusi Pers. (6.45) ke Pers. (6.46) kita dapatkan

$$[\rho(t) - \beta]\, \frac{dn}{dt} + \left[\frac{d\rho}{dt} + \lambda\rho(t)\right] n(t) + \Lambda\left[\lambda q + \frac{dq}{dt}\right] = 0 \tag{6.47}$$

atau

$$\frac{dn}{dt} = \left[\frac{\frac{d\rho}{dt} + \lambda\rho(t)}{\beta - \rho(t)}\right] n(t) + \frac{\Lambda}{\beta - \rho(t)}\left[\lambda q + \frac{dq}{dt}\right] \tag{6.48}$$

Syarat awal untuk persamaan diferensial ini terkait dengan kenaikan densitas neutron ketika terjadi *prompt jump*, yaitu

$$n_{pj} = \left(\frac{\beta - \rho_0}{\beta - \rho(0)}\right) n_0 \tag{6.49}$$

Penyelesaian umum untuk pendekatan *prompt jump* adalah

$$n(t) = \exp\left[\int_0^t \frac{\dfrac{d\rho}{dt'} + \lambda\rho(t')}{\beta - \rho(t')}\,dt'\right] \times \left\{n_{pj} + \int_0^t \frac{\Lambda}{\beta - \rho(t')}\left(\lambda q(t') + \frac{dq}{dt}\right)\exp\left[-\int_0^t \left(\frac{\lambda\rho(\tau) + \dfrac{d\rho}{d\tau}}{\beta - \rho(\tau)}\right)d\tau\right]dt'\right\} \tag{6.50}$$

Jika tidak ada sumber neutron eksternal, Pers. (6.50) menjadi

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\dfrac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\rho(t)}{\beta - \rho(t)}n(t) \tag{6.51}$$

dengan penyelesaian

$$n(t) = n_{pj}\exp\left[\int_0^t \frac{\dfrac{d\rho}{dt'} + \lambda\rho(t')}{\beta - \rho(t')}\,dt'\right] \tag{6.52}$$

Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan:

1. Untuk perubahan reaktivitas yang gayut terhadap waktu (bukan konstan), nilai periode akan berubah-ubah terhadap waktu dan nilai inverse periodenya dapat ditentukan dari

$$s = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{n(t)}\frac{dn}{dt} = \frac{\dfrac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\rho(t)}{\beta - \rho(t)} \tag{6.53}$$

2. Laju perubahan daya reaktor tidak hanya fungsi dari $\rho(t)$ saja, tetapi juga dari laju perubahan reaktivitas, $d\rho/dt$.

3. Daya reaktor dapat turun bahkan jika reaktor berada dalam keadaan superkritis ($\rho(t) > 0$), jika

$$\frac{d\rho}{dt} < -\lambda\rho(t)$$

4. Daya reaktor dapat naik bahkan jika reaktor berada dalam keadaan subkritis ($\rho(t) < 0$), jika

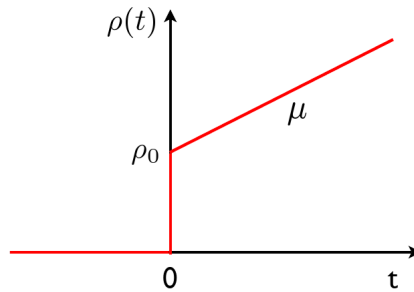
$$\frac{d\rho}{dt} < -\lambda\rho(t) \tag{6.54}$$

$\therefore$ jika reaktivitas berubah secara kontinyu, respons reaktor menjadi sensitif terhadap laju perubahan reaktivitas.

6.6. Perubahan reaktivitas ramp

Kita ingin mengetahui respons reaktor apabila kepadanya diberikan perubahan reaktivitas yang gayut waktu. Di bagian ini kita akan melihat apabila reaktor mendapat perubahan reaktivitas ramp dan di bab **??** kita akan melihat respons reaktor terhadap perubahan reaktivitas yang berosilasi.

Kita anggap pada saat $t < 0$, reaktor berada dalam keadaan kritis pada tingkat daya sebesar n_0. Kemudian pada saat $t = 0$ diberikan reaktivitas positif seperti tampak pada Gambar 6.7. Perubahan reaktivitas dapat ditulis sebagai berikut

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \rho_0 + \mu t, & t \geq 0 \end{cases} \tag{6.55}$$

Gambar 6.7. *Penambahan reaktivitas ramp sebesar* $\rho_0 + \mu t$.

Kita akan menggunakan pendekatan *prompt jump* untuk mencari respons daya reaktor. Anggap reaktor tidak memiliki sumber neutron eksternal, solusi persamaan kinetikanya menjadi

$$n(t) = n_{pj}\, e^{I_1(t)}\, e^{I_2(t)} \tag{6.56}$$

$I_1(t)$ dan $I_2(t)$ merupakan nilai integral dari suku pertama dan suku kedua pada Pers. (6.52), sebagai berikut

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t \frac{\frac{d\rho}{dt'}}{\beta - \rho(t')}\, dt' \\ &= \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\beta - \rho(t)} \\ &= \ln\left(\frac{\beta - \rho_0}{\beta - \rho(t)}\right) \end{aligned} \tag{6.57}$$

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= \int_0^t \frac{\lambda\rho(t')}{\beta-\rho(t')}\,dt' \\
&= \int_0^t \frac{\lambda\rho_0}{\beta\, rho_0-\mu t'}\,dt' + \int_0^t \frac{\lambda\mu t'}{\beta-\rho_0-\mu t'}\,dt' \\
&= \frac{\lambda\rho_0}{\mu}\ln\left(\frac{\beta-\rho_0}{\beta-\rho_0-\mu t}\right) + \lambda\left[\frac{\beta-\rho}{\mu}\ln\left(\frac{\beta-\rho_0}{\beta-\rho_0\mu t}\right)\right] \\
&= \frac{\lambda\beta}{\mu}\ln\left(\frac{\beta-\rho_0}{\beta-\rho_0-\mu t}\right) - \lambda t
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

Daya reaktor kemudian dapat dinyatakan dengan

$$
n(t) = n_{pj}\left[\frac{\beta-\rho_0}{\beta-\rho_0-\mu t}\right]^{1+\frac{\lambda\beta}{\mu}} e^{-\lambda t} \tag{6.59}
$$

atau

$$
n(t) = n_0\left(\frac{\beta}{\beta-\rho_0}\right)\left[\frac{\beta-\rho_0}{\beta-\rho_0-\mu t}\right]^{1+\frac{\lambda\beta}{\mu}} e^{-\lambda t} \tag{6.60}
$$

Jika tidak ada step awal sebesar ρ_0 atau $\rho(t) = \mu t$, daya reaktor dapat dinyakan sebagai

$$
n(t) = n_0 e^{-\lambda t}\left(\frac{\beta}{\beta-\mu t}\right)^{1+\frac{\lambda\beta}{\mu}} \tag{6.61}
$$

Jika tidak ada ramp ($\mu = 0$) dengan kenaikan awal sebesar ρ_0, kita akan mendapatkan

$$
n(t) = n_0\left(\frac{\beta}{\beta-\rho_0}\right)\exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta-\rho_0}t\right) \tag{6.62}
$$

Persamaan (6.62) di atas pada dasarnya sama dengan suku pertama pada persamaan daya reaktor dengan satu kelompok neutron kasip untuk perubahan reaktivitas undak.

6.7. Startup Rate

Reaktivitas tidak diukur secara langsung dan oleh karenanya pada prosedur pengoperasian reaktor daya pada prakteknya sering kali tidak mengacu kepada besaran tersebut. Sebagai gantinya biasanya ditentukan laju yang membatasi kenaikan daya neutron dan biasa disebut dengan *startup rate*.

Startup rate (SUR) didefinisikan sebagai penambahan daya dalam faktor sepuluh dalam waktu satu menit. Satuan SUR oleh karenanya adalah pangkat sepuluhper menit, atau **dekade per menit** (dpm). Hubungan antara daya reaktor dengan SUR adalah sebagai berikut:

$$n(t) = n(0) \times 10^{\textbf{SUR} \cdot t} \tag{6.63}$$

dengan SUR dinyatakan dalam dpm dan t adalah waktu transien reaktor dinyatakan dalam menit.

Semakin besar nilai SUR, semakin cepat perubahan daya reaktor yang terjadi. SUR bisa bernilai positif atau negatif. Jika bernilai positif maka daya akan meningkat dan sebaliknya jika bernilai negatif maka daya akan berkurang. Hubungan antara periode reaktor dengan SUR dapat dinyatakan

$$\frac{n(t)}{n(0)} = \exp\left(\frac{t(\textbf{detik})}{T}\right) = 10^{\textbf{SUR} \cdot t(\textbf{menit})} \tag{6.64}$$

atau

$$SUR = \frac{26,06}{T} \tag{6.65}$$

Contoh Soal

1. *Lifetime* neutron serentak pada reaktor termal adalah $5,7 \times 10^{-4}$ s. Untuk reaktivitas sebesar 0,00065, tentukan periode reaktor dalam (a) detik, (b) inhour. Berapa besarnya reaktivitas dalam satuan dolar?

   Jawab:

   Untuk reaktivitas yang cukup kecil, periode reaktor dapat dihitung sebagai berikut dengan nilai $\beta/\lambda = 0,084$ sesuai tabel
   $$T \approx \frac{\beta}{\lambda\rho} = \frac{0,084}{0,00065} = 130s.$$
   Periode dalam inhour dinyatakan sebagai:
   $$Ih \approx \frac{3600}{T} = \frac{3600}{130} = 28 inhour$$
   Karena $\beta = 0,0065$ maka reaktivitas dinyatakan
   $$\rho = \frac{0,00065}{0,0065} = \$0,10 \text{ (atau 10 sen)}$$

Latihan

1. Sebuah reaktor daya menggunakan uranium yang sedikit diperkaya sebagai bahan bakarnya. Di akhir hidup reaktor (End-of-Life/EOL), 30% dari daya dihasilkan dari pembelahan ^{239}Pu yang terbentuk dari serapan neutron.

   Hitunglah nilai efektif β di awal hidup reaktor (beginning of life/BOL) dan di akhir hidup reaktor (EOL). Tentukan berapa persen kenaikan atau penurunan nilai tersebut.

2. Sebuah reaktor termal dengan bahan bakar uranium beroperasi dengan daya 1 W. Seorang operator kemudian ingin menaikkan daya menjadi 1 kW dalam rentang waktu 2 jam.

   (a) Berapa periode reaktor yang harus dia masukkan ke reaktor ?

   (b) Berapa sen dollar reaktivitas harus ada untuk mencapai periode seperti tersebut di atas?

3. Sebuah reaktor yang tak hingga besar terdiri dari campuran homogen ^{235}U dan air. Konsentrasi dari bahan bakar adalah 5% lebih kecil daripada yang diperlukan untuk mencapai kritikalitas. Berapa besarnya reaktivitas sistem?

4. Dengan menggunakan pendekatan satu kelompok neutron kasip, pendekatan *prompt jump* dan parameter kinetika reaktor $\beta = 0{,}0075$, $\lambda = 0{,}08$/s, $\Lambda = 6 \times 10^{-5}$ s, tentukan besarnya populasi neutron dalam interval waktu $0 < t < 10$ s akibat adanya penambahan reaktivitas *ramp*: $\rho(t) = 0{,}1\beta t$, ke dalam reaktor yang kritis selama interval waktu $0 < t < 5$ s.

Bab 7

Umpan Balik Reaktivitas

Sensations and thoughts do not belong to the "world of energy".
ERWIN SCHRÖDINGER

Learning outcomes :

- Mampu menyusun model dinamika reaktor dengan umpan balik.
- Mampu mengidentikasi perilaku dinamis reaktor.

Minggu ke : 10

SAMPAI saat ini kita telah membicarakan tentang kinetika reaktor (yaitu respons populasi neutron pada sebuah reaktor nuklir terhadap input reaktivitas eksternal) dengan mengasumsikan bahwa tingkat populasi neutron tidak mempengaruhi sifat-sifat sistem yang menentukan kinetika neutron, terutama besarnya reaktivitas. Keadaan ini terjadi ketika populasi neutron cukup kecil sehingga kalor dari reaksi fisi tidak mempengaruhi suhu sistem (atau dengan kata lain pada kondisi *zero power*). Akan tetapi pada sebuah reaktor yang beroperasi dengan populasi neutron yang sangat besar, perubahan kalor fisi yang disebabkan dari perubahan populasi neutron akan mengakibatkan perubahan suhu, yang kemudian juga akan menghasilkan perubahan reaktivitas, atau umpan balik reaktivitas (*reactivity feedback*). Respons gabungan dan terkopel antara populasi neutron, dengan suhu, densitas dan perpindahan berbagai material pada sebuah reaktor nuklir merupakan subyek dari dinamika reaktor.

Ketika populasi neutron meningkat, pemanasan karena fisi akan meningkat. Karena pemanasan ini terdeposit di elemen bahan bakar, suhu bahan bakar akan segera meningkat. Kenaikan suhu bahan bakar akan memperlebar tampang lintang serapan resonansi efektif, yang pada umumnya akan menghasilkan kenaikan serapan neutron dan penurunan reaktivitas. Keadaan ini disebut dengan *efek Doppler*. Elemen bahan bakar juga akan mengalami ekspansi dan dapat sedikit bengkok, sehingga mengubah geometri

bahan bakar–moderator dan faktor kerugian flux (*flux disadvantage factor* = rasio fluks di bahan bakar terhadap fluks di moderator), sehingga menghasilkan perubahan reaktivitas.

Sebagian dari kalor fisi tersebut akan diteruskan dari elemen bahan bakar (dengan konstanta waktu sepersepuluh detik sampai beberapa detik) ke moderator / pendingin dan bahan struktur di sekitarnya. Hal ini akan menyebabkan kenaikan suhu moderator / pendingin dan struktur. Kenaikan suhu moderator / pendingin akan menghasilkan penurunan densitas moderator / pendingin yang akan menyebabkan perubahan sifat lokal bahan bakar – moderator dan perubahan serapan moderator dan faktor kerugian fluks. Di samping itu, penurunan densitas moderator akan mengurangi efektivitas proses moderasi neutron dan akan memperkeras distribusi spektrum neutron (berubah ke energi yang lebih tinggi). Hal ini berarti akan terjadi perubahan tampang lintang serapan efektif bahan bakar, elemen kendali dan sebagainya. Kenaikan suhu struktur juga dapat menyebabkan ekspansi dan deformasi yang selanjutnya menyebabkan perubahan geometri lokal dan mempengaruhi faktor kerugian fluks.

Penurunan densitas moderator / pendingin akan meningkatkan difusi neutron dan kenaikan suhu akan menyebabkan ekspasi reaktor. Pengaruh kenaikan difusi adalah kenaikan bocoran neutron dan pengaruh kenaikan ukuran adalah penurunan bocoran neutron. Jadi efek bocoran neutron akan ditentukan dari dominasi salah satu dari kedua faktor tersebut. Di samping adanya efek umpan alik reaktivitas internal, ada juga efek umpan balik eksternal yang disebabkan oleh perubahan suhu outlet pendingin yang akan menyebabkan perubahan suhu inlet pendingin.

Besarnya reaktivitas pada reaktor dengan adanya umpan balik dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\rho = \rho_{ext} + \sum_i \alpha_i \Delta x_i \tag{7.1}$$

$$= \rho_{ext} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Delta x_i \tag{7.2}$$

dengan ρ_{ext} adalah reaktivitas eksternal (misal perubahan posisi batang kendali, perubahan konsentrasi *chemical shim*), α_i adalah koefisien reaktivitas akibat perubahan parameter x_i, di mana x_i merupakan parameter yang mempengaruhi perubahan reaktivitas misal suhu bahan bakar, suhu moderator, void maupun konsentrasi racun.

7.1. Koefisien Reaktivitas Suhu

Koefisien reaktivitas suhu didefinisikan sebagai

$$\alpha_T \equiv \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial k}{\partial T} \approx \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial T} \tag{7.3}$$

Jika faktor perlipatan dituliskan sebagai

$$k = k_\infty P_{NL} = \eta\, f\, \epsilon\, p\, P_{NL} \tag{7.4}$$

maka nilai koefisien reaktivitas suhu dapat dinyatakan dengan

$$\alpha_T = \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial T} + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial T} + \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{P_{NL}}\frac{\partial P_{NL}}{\partial T} \tag{7.5}$$

7.1.1. Efek Doppler

Tampang lintang tangkapan resonansi dinyatakan sebagai

$$\sigma_\gamma = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \psi(x, \xi) \tag{7.6}$$

dengan ψ adalah fungsi bentuk pelebaran Doppler, yang memperhitungkan proses rata-rata tampang lintang interaksi neutron–nukleus terhadap gerakan termal nukleus

$$\psi(x, \xi) = \frac{\xi}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(x-y)^2 \xi^2/4]} \frac{dy}{1+y^2} \tag{7.7}$$

σ_0 adalah tampang lintang resonansi puncak, Γ_γ dan Γ adalah lebar resonansi tangkapan dan total, $x = (E - E_0)/\Gamma, \xi = \Gamma/(4E_0kT/A)^{1/2}$, E dan E_0 adalah energi neutron dan energi puncak resonansi dan A adalah massa inti dalam satuan amu.Tangkapan total resonansi diberikan oleh integral resonansi

$$I_\gamma = \int \sigma_\gamma(E)\phi(E)\, dE \tag{7.8}$$

Fungsi ψ akan melebar terhadap kenaikan suhu, T, yang mencirikan gerakan nukleus. Pelebaran fungsi ψ akan mengurangi *self-shielding* energi pada resonansi dan menaikkan nilai integral resonansi. Jadi kenaikan suhu bahan bakar karena kenaikan panas fisi akan menyebabkan kenaikan tampang lintang tangkapan efektif $< \sigma_\gamma > \sim I_\gamma$. Hasil yang serupa juga dapat ditemukan untuk resonansi fisi.

Pada reaktor termal, efek Doppler terutama terjadi karena resonansi tangkapan epitermal untuk isotop-isotop bahan tak dapat membelah (Th-242, U-238, Pu-240) dan dapat diperkirakan dengan memperhitungkan perubahan probabilitas lolos resonansi

$$p = e^{-(N_f I_\gamma / \xi \Sigma_p)} \tag{7.9}$$

dengan $\xi \Sigma_p / N_F$ adalah *moderatirng power* rata-rata per atom bahan bakar.

Dengan demikian koeffisien reaktivitas suhu Doppler untuk reaktor termal dapat dihitung sebagai

$$\alpha_{T_F}^D = \frac{\partial \rho}{\partial T_F} \approx \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial T_F} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T_f} = \ln p \left(\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial T_F} \right) \tag{7.10}$$

Karena penambahan panas fisi dideposisi di bahan bakar, suhu bahan bakar (T_F) akan segera meningkat dan pengaruh efek Doppler akan segera mengurangi reaktivitas. Efek Doppler merupakan penyumbang yang sangat kuat terhadap keselamatan dan stabilitas operasional reaktor termal.

Nilai integral resonansi untuk $U^{238}O_2$ dan $Th^{232}O_2$ adalah

$$
\begin{aligned}
I(300\,K) &= 11,6 + 22,8\left(\frac{S_F}{M_F}\right) \\
I(T_F) &= I(300\,K)\left[1 + \beta''\left(\sqrt{T(K)} - \sqrt{300}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Nilai β'' dinyatakan sebagai berikut

$$
\beta'' = \begin{cases} 61\times 10^{-4} + 47\times 10^{-4}\left(\dfrac{S_F}{M_F}\right), & \text{untuk UO}_2 \\ \\ 97\times 10^{-4} + 120\times 10^{-4}\left(\dfrac{S_F}{M_F}\right), & \text{untuk ThO}_2 \end{cases}
\tag{7.12}
$$

dengan S_F dan M_F adalah luas permukaan dan massa elemen bahan bakar. Menggunakan pendekatan ini, Pers. (7.10) menjadi

$$
\alpha_{T_F}^{D} = -\ln\left[\frac{1}{p(300K)}\right]\frac{\beta''}{2\sqrt{T_F(K)}}
\tag{7.13}
$$

7.1.2. Pengaruh Ekspansi Bahan Bakar dan Moderator terhadap Probabilitas Lolos Resonansi

Ketika suhu bahan bakar meningkat, bahan bakar akan mengembang dan menyebabkan penurunan densitas bahan bakar. Hal ini akan mempengaruhi nilai probabilitas lolos resonansi dan memberikan kontribusi serentak pada koefisien reaktivitas suhu

$$
\alpha_{T_F}^{p} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial N_F}\frac{\partial N_F}{\partial T_F} = \ln p\left(\frac{1}{N_F}\partial N_F \partial T_F\right) = -3\theta_F \ln p
\tag{7.14}
$$

dengan $(dN/dT)/N = -3(dl/dT)/l = -3\theta$ dengan θ adalah koefisien linear ekspansi material. Karena densitas bahan bakar berkurang terhadap ekspansi, serapan resonansi menjadi berkurang dan kontribusi koefisien reaktivitas adalah positif (perhatikan bahwa karena $p < 1, \ln p < 0$).

Setelah kenaikan panas fisi ditransfer ke luar dari bahan bakar menuju ke pendingin/moderator, suhu moderator (T_M) akan naik yang kemudian menyebabkan moderator mengembang dan memberikan kontribusi tertunda kepada koefisien reaktivitas suhu

$$
\alpha_{T_M}^{p} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial N_M}\frac{\partial N_M}{\partial T_M} = -\ln p\left(\frac{1}{N_M}\partial N_M \partial T_M\right) = -3\theta_M \ln p
\tag{7.15}
$$

Penurunan densitas moderator akan mengurangi daya moderasi sehingga menurunkan probabilitas neutron akan dihamburkan ke energi di bawah resonansi, jadi akan menaikkan serapan resonansi dan memberikan kontribusi negatif terhadap koefisien reaktivitas.

7.1.3. Penggunaan Termal

Faktor penggunaan termal dapat dituliskan secara sederhana terkait dengan tampang lintang efektif bahan bakar dan moderator yang telah dirata-rata terhadap sel sebagai berikut

$$f = \frac{\Sigma_{aF}^{eff}}{\Sigma_{aF}^{eff} + \Sigma_{aM}^{eff}} \tag{7.16}$$

Mengingat bahwa $\Sigma \equiv N\sigma$, koefisien reaktivitas yang terkait dengan penggunaan termal mempunyai komponen negatif seketika yang disebabkan karena kenaikan suhu bahan bakar serta kontribusi positif tertunda yang terkait dengan penurunan densitas moderator

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial T} &= (1-f)\left[\left(\frac{1}{\alpha_a^F}\frac{\partial \alpha_a^F}{\partial T_F} + \frac{1}{\Sigma_a^F}\frac{\partial \Sigma_a^F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial T_F} + \frac{1}{\alpha_N^F}\frac{\partial \alpha_N^F}{\partial T_F}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{\alpha_a^M}\frac{\partial \alpha_a^M}{\partial T_M} + \frac{1}{\Sigma_a^M}\frac{\partial \Sigma_a^M}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial T_M} + \frac{1}{\alpha_N^M}\frac{\partial \alpha_N^M}{\partial T_M}\right)\right] \\ &\approx (1-f)\left[\left(\frac{1}{2T_F} - \frac{1}{\Sigma_a^F}\frac{\partial \Sigma_a^F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial T_F} + 3\theta_F\right) - \left(-\frac{1}{\Sigma_a^M}\frac{\partial \Sigma_a^M}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial T_M} + 3\theta_M\right)\right] \\ &\equiv \alpha_{T_F}^f + \alpha_{T_M}^f \end{aligned} \tag{7.17}$$

Kenaikan suhu bahan bakar akan memperkuat distribusi energi neutron termal menuju ke energi yang lebih tinggi. Dengan demikian tampang lintang bahan bakar termal yang diboboti spektrum $1/v$ akan berkurang dan menurunkan nilai penggunaan termal. Kenaikan suhu bahan bakar juga mengurangi densitas bahan bakar sehingga akan lebih menurunkan penggunaan termal. Kenaikan suhu moderator mempunyai efek yang kecil terhadap tampang lintang moderator akan tetapi mengurangi densitas moderator sehingga menaikkan penggunaan termal.

7.1.4. Probabilitas Tak Lolos

Probabilitas tak lolos dapat dinyatakan sebagai

$$P_{NL} \approx \frac{1}{1 + M^2 B_g^2} \tag{7.18}$$

Kenaikan suhu dapat mempengaruhi probabilitas tak lolos dengan cara mengubah karakteristik panjang migrasi neutron (jarak rata-rata sebuah neutron akan berpindah sebelum mengalami serapan) dan dengan mengubah ukuran reaktor. Dengan menganggap bahwa kedua efek terkait dengan perubahan suhu moderator, kita dapat menuliskan

$$\frac{1}{P_{NL}}\frac{\partial P_{NL}}{\partial T_M} = -\frac{M^2 B_g^2}{1 + M^2 B_g^2}\left(\frac{1}{M^2}\frac{\partial M^2}{\partial T_M} + \frac{1}{B_g^2}\frac{\partial B_g^2}{\partial T_M}\right) \tag{7.19}$$

Kenaikan suhu moderator menyebabkan penurunan densitas moderator yang kemudian mempengaruhi luas migrasi

$$\frac{1}{M^2}\frac{\partial M^2}{\partial T_M} = \frac{1}{D_M}\frac{\partial D_M}{\partial T_M} - \frac{1}{\Sigma_a^M}\frac{\partial \Sigma_a^M(1-f)}{\partial T_M} = 6\theta_M + \frac{1}{2T_F} - \frac{1}{1-f}\frac{\partial f}{\partial T} \tag{7.20}$$

di sini kita menggunakan $\Sigma_a = \Sigma_a^M + \Sigma_a^F = \Sigma_a^M(1-f)$.

Buckling geometri $B_g = G/l_R$, di mana G adalah konstanta yang tergantung kepada geometri dan l_R adalah dimensi fisis karakteristik reaktor. Sehingga

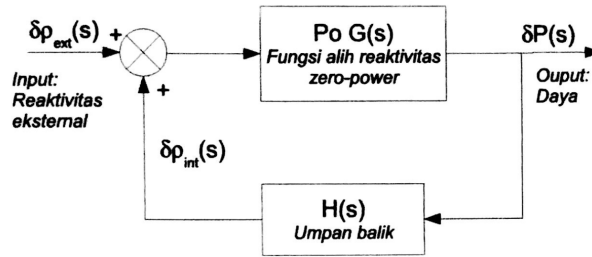
$$\frac{1}{B_g^2}\frac{\partial B_g^2}{\partial T_M} = \left(\frac{l_R}{G}\right)^2 \frac{\partial (G/l_R)^2}{\partial T_M} = -2\left(\frac{1}{l_R}\frac{\partial l_R}{\partial T_M}\right) \tag{7.21}$$

sehingga Pers. (7.19) menjadi

$$\alpha_{TM}^{P_{NL}} = \frac{1}{P_{NL}}\frac{\partial P_{NL}}{\partial T_M} = \frac{M^2B_g^2}{1+M^2B_g^2}\left(\frac{2}{l_R}\frac{\partial l_R}{\partial T_M} - 6\theta_M - \frac{1}{2T_F} + \frac{1}{1-f}\frac{\partial f}{\partial T}\right) \tag{7.22}$$

Penurunan densitas moderator menyebabkan neutron berjalan lebih jauh tanpa serapan. Hal ini berarti akan meningkatkan bocoran dan memberikan kontribusi negatif terhadap koefisien reaktivitas. Ekspansi reaktor berarti neutron harus berjalan lebih jauh agar dapat lolos sehingga memberikan kontribusi positif terhadap koefisien reaktivitas.

7.2. Reaktor Daya

Pada sebuah reaktor yang beroperasi pada tingkat daya, perubahan suhu reaktor akan memberikan pengaruh terhadap besarnya reaktivitas. Dengan demikian pada sistem reaktor tersebut terjadi umpan balik (*feedback*).

Gambar 7.1. *Diagram sistem reaktor titik dengan umpan balik.*

Fungsi alih kalang terbuka (*open loop transfer function*) pada diagram di atas adalah fungsi alih *zero-power*. Untuk alasan praktis kita tidak akan bekerja dengan populasi neutron (n_0 dan δn), akan tetapi menggunakan daya referensi (P_0) dan fluktuasi daya (δP). Pada persamaan kinetika, simbol n dapat diganti dengan P. Perhatikan pula bahwa q dan c_i harus dinyatakan dengan besaran yang tepat. Untuk reaktor yang homogen (seperti pada reaktor titik) berlaku:

$$\Lambda = \frac{1}{\nu v \Sigma_f} \tag{7.23}$$

dengan ν adalah produksi neutron total (neutron serentak dan kasip) rata-rata per fisi, v adalah kecepatan neutron dan Σ_f adalah tampang lintang fisi.

Karena kita menggunakan pendekatan satu kelompok, maka besaran yang digunakan harus dirata-rata dengan spektrum energi. Untuk reaktor daya berlaku:

$$P = nv\Sigma_f Q_f \tag{7.24}$$

dengan Q_f adalah produksi energi rata-rata per fisi (sekitar 200 MeV atau $3,2 \times 10^{-11}$ Ws).

7.3. Umpan Balik

Skema dari reaktor titik dengan umpan balik ditunjukkan pada Gambar 7.1. $\delta\rho_{ext}$ merupakan masukan atau input yaitu reaktivitas eksternal, δP adalah keluaran atau output yaitu daya, $G(s)$ adalah fungsi alih *zero-power* dan $H(s)$ adalah fungsi alih umpan balik.

Dengan demikian berlaku:

$$\delta P(s) = [\delta\rho_{ex}(s) + \delta P(s)\, H(s)]\, P_0\, G(s) \tag{7.25}$$

sehingga fungsi alih reaktivitas untuk reaktor daya menjadi

$$Y(s) = \frac{\delta P(s)}{\delta\rho_{ex}(s)} = \frac{P_0 G(s)}{1 - P_0 G(s) H(s)} \tag{7.26}$$

Fungsi alih *zero-power* diperoleh dengan melakukan transformasi Laplace terhadap persamaan kinetika titik sebagai berikut.

Kali ini kita akan membicarakan fluktuasi yang kecil terhadap daya reaktor yang sudah berada pada kondisi setimbang. Fluktuasi yang diberikan berupa perubahan reaktivitas yang dalam hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk variasi sinusoid terhadap waktu. Selanjutnya kita akan melihat bagaimana daya reaktor akan mengalami perubahan akibat variasi reaktivitas tersebut. Perlu diperhatikan bahwa validitas dari analisis respons frekuensi yang dijabarkan di sini hanya berlaku untuk fluktuasi yang kecil saja. Fluktuasi yang besar menyebabkan faktor nonlinearitas pada sistem menjadi dominan sehingga model yang kita turunkan menjadi tidak valid.

Misalkan kita mempunyai reaktor yang beroperasi dengan sumber neutron yang konstan. Densitas neutron (atau daya), konsentrasi prekursor, reaktivitas dan sumber neutron dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$n = n_0 + \delta n \tag{7.27}$$

$$c_i = c_{i0} + \delta c_i \tag{7.28}$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \tag{7.29}$$

$$s = s_0 \tag{7.30}$$

dengan *subscript* 0 menyatakan kondisi setimbang. Untuk konsentrasi prekursor dan sumber neutron, kondisi setimbang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$c_{i0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i \Lambda} \tag{7.31}$$

$$s_0 = -\frac{\rho_0}{\Lambda} n_0 \tag{7.32}$$

Kita tuliskan kembali persamaan kinetika reaktor titik dengan sumber neutron eksternal sebagai berikut

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i + s \tag{7.33}$$

dan selanjutnya kita substitusi Pers. (7.27) – (7.32) ke Pers. (7.33), akan kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta n &= \frac{(\rho_0 + \delta\rho) - \beta}{\Lambda}(n_0 + \delta n) + \sum_i \lambda_i (c_{i0} + \delta c_i) - \frac{\rho_0}{\Lambda} n_0 \\ &= \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}\delta n + \frac{n_0}{\Lambda}\delta\rho + \frac{1}{\Lambda}\delta\rho\delta n + \sum_i \lambda_i \delta c_i \end{aligned} \tag{7.34}$$

Jika kita tuliskan persamaan untuk konsentrasi prekursor

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \tag{7.35}$$

dan kemudian kita substitusi Pers. (7.27) dan (7.28) ke Pers. (7.35), akan kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta c_i &= \frac{\beta_i}{\Lambda}(n_0 + \delta n) - \lambda_i (c_{i0} + \delta c_i) \\ &= \frac{\beta_i}{\Lambda}\delta n - \lambda_i \delta c_i \end{aligned} \tag{7.36}$$

Suku ketiga di sebelah kanan pada Pers. (7.34) merupakan suku nonlinear yang akan berpengaruh jika fluktuasi yang terjadi relatif besar. Untuk penyederhanaan kita anggap osilasi yang terjadi sangat kecil, atau $|\delta n| \ll n_0$. Dengan demikan nilai $\delta\rho\delta n$ dapat diabaikan. Untuk itu, Pers. (7.34) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d}{dt}\delta n = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}\delta n + \frac{n_0}{\Lambda}\delta\rho + \sum_i \lambda_i \delta c_i \tag{7.37}$$

Sekarang kita gunakan transformasi Laplace untuk mengubah domain waktu menjadi domain frekuensi (karena osilasi reaktivitas yang diberikan kepada reaktor berbentuk sinusoidal dengan frekuensi tertentu). Didefinisikan notasi sebagai berikut:

$$N(s) = \int_0^\infty \delta n(t)\, e^{-st} dt \tag{7.38}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \delta c_i(t)\, e^{-st} dt \tag{7.39}$$

$$R(s) = \int_0^\infty \delta \rho(t)\, e^{-st} dt \tag{7.40}$$

Jika pada Pers. (7.36) kita transformasi menjadi domain frekuensi, kita dapatkan

$$s\Gamma_i(s) = \frac{\beta_i}{\Lambda} N(s) - \lambda_i \Gamma_i(s) \tag{7.41}$$

atau

$$\Gamma_i(s) = \frac{\beta_i}{\Lambda(s + \lambda_i)} N(s) \tag{7.42}$$

Selanjutnya jika kita transformasi Pers. (7.37) serta kita substitusi hasil pada Pers. (7.42), kita dapatkan

$$sN(s) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N(s) + \frac{n_0}{\Lambda} R(s) + \sum_i \lambda_i \Gamma_i(s) \tag{7.43}$$

atau

$$N(s) = \frac{n_0 R(s)}{\left(\Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \right)} \tag{7.44}$$

atau

$$\frac{N(s)}{R(S)} = \frac{n_0}{\left(\Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \right)} \tag{7.45}$$

Pers. (7.45) menyatakan hubungan antara besarnya konsentrasi neutron atau daya $N(S)$ (out-put) terhadap besarnya reaktivitas $R(s)$ (input). Atau dengan kata lain Pers. (7.45) merupakan **fungsi alih reaktivitas (*reactivity transfer function*)** atau disebut pula dengan fungsi alih *zero-power* yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$G(s) = \frac{1}{n_0} \frac{N(s)}{R(S)} = \frac{1}{\left(\Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \right)} \tag{7.46}$$

Persamaan 7.46 adalah persamaan umum untuk $G(s)$ dan dapat kita lihat bahwa bentuk dari $G(s)$ cukup kompleks karena merupakan rasio antara dua buah polinomial dengan orde 6 (pembilang) dan 7 (penyebut). Kita dapat melakukan beberapa pendekatan terhadap $G(s)$ untuk beberapa kondisi, antara lain sebagai berikut.

Untuk s yang sangat kecil,

$$G(s) \approx \begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_0} = \dfrac{1}{|\rho_0|}, & \textbf{jika } \rho_0 \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{\left(\Lambda + \sum_i \dfrac{\beta_i}{\lambda_i}\right)s}, & \textbf{jika } \rho_0 = 0 \end{cases} \tag{7.47}$$

Untuk s yang sangat besar,

$$G(s) \approx \frac{1}{\Lambda s} \tag{7.48}$$

Karena Λ sangat kecil, terdapat rentang antara, $|s| \gg \lambda_i$,

$$G(s) \approx \frac{1}{\beta - \rho_0} \tag{7.49}$$

Untuk satu grup neutron kasip

$$G(s) = \frac{1}{\left(\Lambda + \dfrac{\beta}{s+\lambda}\right)s - \rho_0} \tag{7.50}$$

yang bisa dituliskan juga sebagai

$$G(s) = \frac{(s+\lambda)}{\Lambda s^2 + (\beta + \Lambda\lambda - \rho_0)s - \lambda\rho_0} \tag{7.51}$$

Untuk reaktor yang kritis

$$G(s) = \frac{1}{\left(\Lambda + \dfrac{\beta}{s+\lambda}\right)s} \tag{7.52}$$

dan untuk satu grup neutron kasip menjadi

$$G(s) = \frac{(s+\lambda)}{\Lambda s\left(s + \lambda + \dfrac{\beta}{\Lambda}\right)} \tag{7.53}$$

Fungsi ini mempunyai *pole* pada $s = s_1 = 0$ dan $s = s_2 = -(\lambda + \beta/\lambda)$. Karena $\lambda \ll \beta/\lambda$, maka pendekatan yang bagus dapat diperoleh dengan menuliskan

$$G(s) \approx \frac{s+\lambda}{\Lambda s\left(s + \dfrac{\beta}{\Lambda}\right)} \tag{7.54}$$

Untuk pendekatan *prompt jump*, dengan $\Lambda \to 0$, Pers. (7.54) menjadi

$$G(s) \approx \frac{1}{\beta}\frac{s+\lambda}{s} \tag{7.55}$$

Untuk $|s| \ll \lambda$ (atau $|s| \ll \min \lambda_i$), kita dapatkan

$$G(s) \approx \frac{\lambda}{\beta s} \tag{7.56}$$

Untuk $|s| \gg \lambda$ (atau $|s| \gg \max \lambda_i$), kita mendapatkan pendekatan *constant source*. Dari Pers. (7.54) dengan mengabaikan λ,

$$G(s) \approx \frac{1}{\Lambda s + \beta} \tag{7.57}$$

Pada rentang frekuensi menengah, kita dapatkan

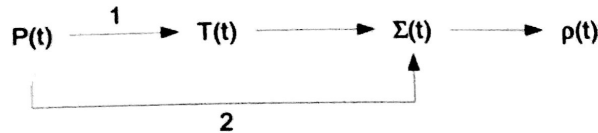
$$G(s) \approx \frac{1}{\beta} \tag{7.58}$$

dan pada frekuensi yang sangat tinggi, kita dapatkan

$$G(s) \approx \frac{1}{\Lambda s} \tag{7.59}$$

Fungsi alih umpan balik, $H(s)$, menyatakan perubahan reaktivitas akibat perubahan daya reaktor, atau

$$H(s) = \frac{\delta \rho_{int}(s)}{\delta P(s)} \tag{7.60}$$

Fungsi alih $H(s)$ tergantung kepada sifat-sifat termohidrolika reaktor, misalnya perubahan suhu yang terjadi sebagai akibat perubahan daya dan perubahan sifat-sifat fisika reaktor sebagai akibat dari perubahan suhu. Gambar 7.2 menampilkan skema perubahan tersebut.

Gambar 7.2. *Skema perubahan reaktivitas akibat perubahan daya reaktor.*

Jalur nomor 1 menampilkan kegayutan reaktivitas terhadap perubahan suhu, sebagai contoh:

- perubahan densitas, terutama pada perubahan fase (misal reaktor BWR),
- perubahan tampang lintang mikroskopik, sebagai contoh sebagai akibat efek Doppler atau berubahnya hamburan termal,
- pergeseran material karena mengembang dan/atau pembengkokan, perubahan rasio moderator-bahan bakar (MFR)

Jalur nomor 2 menunjukkan perubahan produksi atau penggunaan nuklida misalnya penggunaan bahan bakar dan peracunan xenon (meskipun hal ini tidak juga bisa dilepaskan secara utuh dari pengaruh suhu).

Untuk keperluan studi perubahan reaktivitas dalam rentang waktu yang pendek, jalur pertama adalah yang paling penting. Suhu pada reaktor bersifat gayut ruang dan analisis pendekatan kinetika untuk

reaktor daya juga memperhitungkan hal tersebut. Kita kemudian bekerja dengan variabel dan parameter yang *terdistribusi*.

Pada beberapa kasus, dan tentu saja sebagai pendekatan awal, kita dapat bekerja dengan variabel dan parameter yang *terkonsentrasi* ("*lumped parameters*"). Dengan kata lain kita menggunakan model titik termohidrolika di mana kita bekerja dengan misalnya satu suhu bahan bakar dan satu suhu moderator, yang dipilih sebagai rata-rata dari distribusi suhu gayut ruang. Salah contoh dari model ini akan dibahas pada Bagian 7.4.

Apabila muncul kondisi nonlinear, maka analisis hanya dibatasi pada variasi besaran yang kecil sehingga teknik linearisasi dapat dilakukan.

Misalkan P adalah daya reaktor, T_f adalah suhu bahan bakar dan T_m adalah suhu moderator (diasumsikan bahwa moderator juga bertindak sebagai pendingin). Selanjutnya akan dapat ditunjukkan bahwa untuk variasi yang kecil, persamaan kinetika dari perilaku termal dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta T_f &= a\delta P - \omega_f \delta T_f \\ \frac{d}{dt}\delta T_m &= b\delta T_f - \omega_m \delta T_m \end{aligned} \tag{7.61}$$

dengan ω_f dan ω_m adalah kebalikan dari konstanta waktu untuk perubahan suhu bahan bakar dan suhu moderator.

Dari kedua persamaan tersebut tampak bahwa suhu bahan bakar akan bereaksi yang paling cepat terhadap perubahan daya sementara suhu moderator bereaksi agak terlambat mengingat adanya waktu yang diperlukan untuk transfer kalor dari bahan bakar ke moderator/pendingin.

Misalkan respons terhadap pulsa daya adalah

$$\delta P(t) = P_0\, \delta(t) \tag{7.62}$$

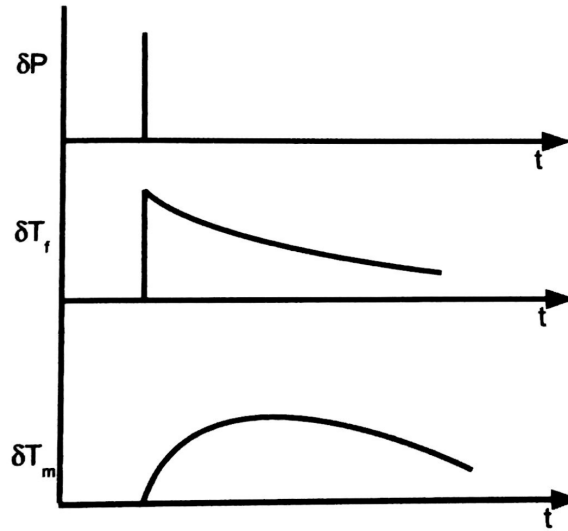
dengan $\delta(t)$ adalah fungsi delta-Dirac, maka berlaku

$$\begin{aligned} \delta T_f(t) &= a\, P_0 e^{-\omega_f t} \\ \delta T_m(t) &= \frac{ab\, P_0}{\omega_m - \omega_f}\left(e^{-\omega_f t} - e^{-\omega_m t}\right) \end{aligned} \tag{7.63}$$

Dalam bentuk sketsa, perubahan tersebut ditampilkan pada Gambar 7.3.

Perubahan reaktivitas kemudian dapat dinyatakan dengan

$$\delta\rho = \alpha_f \delta T_f + \alpha_m \delta T_m \tag{7.64}$$

dengan α_f dan α_m masing-masing adalah koefisien reaktivitas suhu bahan bakar dan moderator yang harus ditentukan dari perhitungan fisika reaktor.

Gambar 7.3. *Perubahan suhu bahan bakar dan moderator akibat adanya perubahan daya berbentuk pulsa.*

7.4. Umpan balik termohidrolika

Sesuai dengan pembahasan pada Bagian 7.3, kita memilih variabel-variabel yang terkonsentrasi adalah variasi suhu bahan bakar (δT_f) dan variasi suhu pendingin/moderator (δT_m).

Persamaan neraca energinya adalah sebagai berikut

$$m_f c_{p,f} \frac{d}{dt} \delta T_f = \delta P - hA(\delta T_f - \delta T_m) \tag{7.65}$$

$$m_m c_{p,m} \frac{d}{dt} \delta T_m = -\dot{m}_m c_{p,m} \delta T_{out} + hA(\delta T_f - \delta T_m) \tag{7.66}$$

dengan c_p adalah kapasitas kalor, m adalah massa, $\dot{m}$ adalah laju aliran massa, P adalah daya, h adalah koefisien perpindahan kalor konveksi dari bahan bakar ke pendingin, δT_{out} adalah variasi suhu keluaran pendingin dan A adalah luas permukaan perpindahan kalor. Indeks m dan f masing-masing menyatakan bahan moderator dan bahan bakar.

Perhatikan pula bahwa persamaan di atas menyatakan neraca untuk variasi variabel, adapun besarnya masing-masing variabel adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \delta P \\ T_f &= T_{f0} + \delta T_f \\ T_m &= T_{m0} + \delta T_m \\ T_{out} &= T_{out,0} + \delta T_{out} \end{aligned} \tag{7.67}$$

dengan indeks 0 menyatakan kondisi stasioner masing-masing variabel.

Selanjutnya kita mengasumsikan bahwa bahan pendingin akan dipanasi secara linear sepanjang arah alirannya. Dengan demikian suhu rata-rata moderator sama dengan $\frac{1}{2}(T_{in} + T_{out})$ dengan T_{in} adallah

suhu masukan pendingin. Kita asumsikan pula bahwa suhu masukan pendingin tidak bervariasi sehingga berlaku hubungan $\delta T_m = \frac{1}{2}\delta T_{out}$. Dengan demikian Pers. (7.65) dan (7.66) dapat dituliskan sebagainya

$$\frac{d}{dt}\delta T_f = \frac{1}{m_f c_{p,f}}\delta P - \frac{hA}{c_{p,f} m_f}(\delta T_f - \delta T_m) \tag{7.68}$$

$$\frac{d}{dt}\delta T_m = \frac{hA}{c_{p,m} m_m}\delta T_f - \frac{hA + 2\dot{m}_m c_{p,m}}{m_m c_{p,m}}\delta T_m \tag{7.69}$$

atau jika disederhanakan bentuknya menjadi

$$\frac{d}{dt}\delta T_f = a\delta P - \frac{1}{\tau_f}(\delta T_f - \delta T_m) \tag{7.70}$$

$$\frac{d}{dt}\delta T_m = b\delta T_f - \frac{1}{\tau_m}\delta T_m \tag{7.71}$$

Dalam hal ini

$\tau_f = \frac{m_f c_{p,f}}{hA}$ = konstanta waktu untuk pemanasan atau pendinginan bahan bakar.

$\tau_m = \frac{m_m c_{p,m}}{hA + 2\dot{m}_m c_{p,m}}$ = konstanta waktu untuk pemanasan atau pendinginan bahan moderator atau pendingin.

$\tau_c = \frac{m_m}{2\dot{m}_m}$ = setengah waktu tempuh pendingin untuk melewati teras reaktor.

Selanjutnya kita gunakan transformasi Laplace terhadap Pers. (7.70) dan (7.71) kita dapatkan

$$s\delta T_f(s) = a\delta P(s) - \frac{1}{\tau_f}\left(\delta T_f(s) - \delta T_m(s)\right) \tag{7.72}$$

dan

$$s\delta T_m(s) = b\delta T_f(s) - \frac{1}{\tau_m}\delta T_m(s) \tag{7.73}$$

atau

$$\delta T_m(s) = \frac{b}{s + \frac{1}{\tau_m}}\delta T_f(s) \tag{7.74}$$

Jika Pers. (7.74) disubstitusikan ke Pers. (7.72), akan didapatkan

$$\frac{\delta T_f(s)}{\delta P(s)} = \frac{a}{s + \dfrac{1}{\tau_f} - \dfrac{b}{\tau_f\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)}} \tag{7.75}$$

$$\frac{\delta T_m(s)}{\delta P(s)} = \frac{ab}{\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)\left(s + \dfrac{1}{\tau_f} - \dfrac{b}{\tau_f\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)}\right)} \tag{7.76}$$

Persamaan (7.75) disebut dengan *fungsi alih dari daya ke suhu bahan bakar*, sementara Pers.(7.76) disebut dengan *fungsi alih dari daya ke suhu moderator*.

Jika pada Pers. (7.64) dilakukan transformasi Laplace, akan didapatkan

$$\delta R(s) = \alpha_f \delta T_f(s) + \alpha_m \delta T_m(s) \tag{7.77}$$

Jika Pers. (7.75), (7.76) dan (7.77) digabungkan, akan diperoleh *fungsi umpan balik*, $F(s)$, yang dicari,

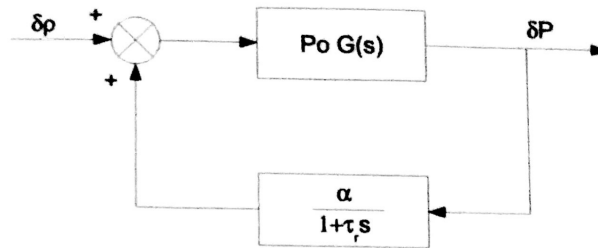
$$\begin{aligned} F(s) = \frac{\delta R(s)}{\delta P(s)} &= \alpha_f \frac{a}{s + \dfrac{1}{\tau_f} - \dfrac{b}{\tau_f\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)}} + \alpha_m \frac{ab}{\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)\left(s + \dfrac{1}{\tau_f} - \dfrac{b}{\tau_f\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)}\right)} \\ &= \frac{\alpha_f a\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right) + \alpha_m\, a\, b}{\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)\left(s + \dfrac{1}{\tau_f} - \dfrac{b}{\tau_f\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)}\right)} \end{aligned} \tag{7.78}$$

Untuk $s = 0$, Pers. (7.78) menjadi

$$F(0) = \frac{\alpha_f\, a + \alpha_m\, \tau_m\, a\, b}{\dfrac{1}{\tau_f}\,(1 - b\,\tau_m)} \quad \text{MW}^{-1} \tag{7.79}$$

Persamaan (7.79) disebut pula dengan *koefisien umpan balik statik*. Besaran ini menyatakan berapa besarnya reaktivitas yang akan ditambahkan pada sebuah reaktor kritis apabila daya reaktor naik sebesar 1 MW.

7.5. Reaktor titik dengan umpan balik orde satu

Pengaruh umpan balik suhu terhadap fungsi alih akan kita pelajari dengan menggunakan kasus yang lebih sederhana daripada yang sudah dijelaskan di bagian 7.4, yaitu dengan menggunakan model reaktor dengan umpan balik orde satu. Gambar 7.4 menampilkan blok diagram sistem reaktor tersebut.

Gambar 7.4. *Diagram blok untuk reaktor titik dengan umpan balik orde satu.*

$H(s)$ ditentukan sepenuhnya oleh satu konstanta waktu, τ_r, dan koefisien umpan balik statik, $H(0) = \alpha$. Fungsi alih total dapat dinyatakan dengan

$$Y(s) = \frac{P_0 G(s)}{1 - P_0 G(s) H(s)} \tag{7.80}$$

Karena konstanta waktu termohidrolika jauh lebih besar daripada waktu generasi neutron, dengan demikian umpan balik akan lebih kelihatan pada frekuensi yang jauh di bawah $\omega = \beta/\Lambda$. Untuk itu kita memilih $G(s)$ dengan pendekatan

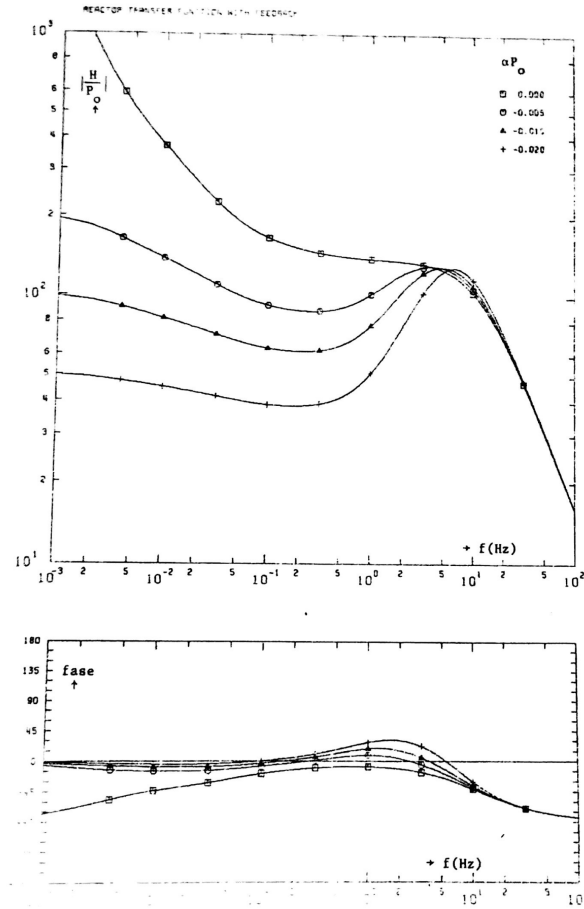
$$G(s) = \frac{s + \lambda}{s\beta} \tag{7.81}$$

dengan semua neutron kasip digabungkan menjadi satu grup.

Perilaku dari $Y(s)$ ditampilkan pada Gambar 7.5. Tampak dengan jelas bahwa dengan tidak adanya umpan balik suhu, fungsi alihnya sama dengan $P_0 G(s)$. Karena fungsi alih ini gayut terhadap daya reaktor, modulus $Y(s)$ pada grafik dibagi dengan daya reaktor. Untuk $\omega = 0$ berlaku

$$Y(0) = -\frac{1}{H(0)} \tag{7.82}$$

sehingga untuk koefisien statik yang negatif akan menghasilkan amplifikasi yang berhingga.

Dengan meningkatnya frekuensi, umpan balik menjadi kurang efektif dan untuk frekuensi yang lebih besar dari *break frequency* (pada grafik $f = \dfrac{1}{2\pi\tau_r} = 1$ Hz) perilaku reaktor kurang lebih sama dengan reaktor *zero power*.

Gambar 7.5. *Gain dan fase untuk fungsi alih reaktor dengan umpban balik. Keterangan: H pada gambar adalah Y pada teks di dikstat ini. f adalah frekuensi, $\omega = 2\pi f$.*

Fase dari $Y(s)$ perlu mendapat perhatian. Untuk frekuensi yang rendah ($\omega \to 0$) berlaku

$$\frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{j\omega\beta}{P_0\lambda} - \alpha \tag{7.83}$$

Untuk sudut fase θ dari $Y(j\omega)$ berlaku

$$\tan\theta = \frac{\omega\beta}{\alpha P_0\lambda} \tag{7.84}$$

di mana tampak untuk $\alpha < 0$ sudut fase bergerak dari sisi negatif menuju nol.

Untuk daerah plateau dari $G(s)$, yaitu $G(s) \approx \dfrac{1}{\beta}$, berlaku

$$\frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{\beta}{P_0} - \frac{\alpha}{1 + j\omega\tau_r} \tag{7.85}$$

dan untuk sudut fase θ dari $Y(j\omega)$

$$\tan\theta = \frac{\omega\tau_r}{1 - \dfrac{\beta}{P_0}\cdot\dfrac{1+\omega^2\tau_r^2}{\alpha}} \tag{7.86}$$

Untuk α yang negatif maka sudut fase akan positif. Semakin besar nilainya, semakin negatif pula nilai $P_0 H(0)$.

LATIHAN

1. Hitung koefisien reaktivitas suhu Doppler untuk reaktor termal berbahan bakar UO_2 dan berpendingin H_2O dengan batang bahan bakar berdiameter 1 cm dan beroperasi pada suhu bahan bakar 450 K. Tampang lintang hamburan makroskopik moderator per atom ^{238}U adalah 100. Nilai integral resonansi pada 300 K adalah $I = 10$ barn.

2. Hitunglah koefisien reaktivitas suhu tak-lolos untuk reaktor grafit silinder polos dengan rasio tinggi-ke-diameter $H/D = 1; k_\infty = 1,1$; luasan migrasi $M^2 = 400$ cm^2 dan koefisien ekspansi linear moderator $\theta_M = 10^{-5}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$.

3. Koefisien suhu total untuk reaktor berbahan bakar ^{235} adalah $-2 \times 10^{-5}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$. Berapa besarnya penurunan reaktivitas pada sistem reaktor jika suhu meningkat dari suhu kamar 23 °C ke suhu operasi 290 °C . Nyatakan jawaban Anda dalam satuan persen dan dolar.

Bab 8

Peracunan Produk Fisi

I was taught that the way of
progress was neither swift nor easy.
MARIE CURIE

Learning outcomes :

- Mampu mengidentikasi perilaku dinamis reaktor.
- Mampu menjelaskan pengaruh deplesi dan konversi bahan bakar serta peracunan produk fisi terhadap reaktivitas reaktor.

Minggu ke : 11

DARI reaksi fisi akan dihasilkan produk fisi beserta produk luruhannya yang akan menyerap neutron. Akumulasi dari serapan parasitik selama operasi reaktor cenderung mengurangi faktor perlipatan neutron. Di antara semua material non-fisi yang terakumulasi selama operasi reaktor, dua jenis material yang paling penting untuk reaktor termal adalah Xe-135 dan Sm-149 yang mempunyai tampang lintang serapan neutron termal yang tinggi. Karena tampang lintang serapan akan berkurang dengan cepat seiring dengan naiknya energi neutron, efek peracunan mempunyai pengaruh yang kecil pada reaktor cepat. Perubahan faktor perlipatan neutron dengan adanya material racun pada reaktor termal akan dibahas sebagai berikut.

Faktor perlipatan neutron dapat dituliskan sebagai

$$k_{eff} = k_{\infty} P = \eta \epsilon p f P \tag{8.1}$$

dengan P merupakan probabilitas tidak bocor untuk neutron termal maupun cepat. Jika ditambahkan material racun yang merupakan penyerap kuat maka

- Probabilitas tidak bocor berubah sedikit karena nilainya berbanding terbalik dengan $L^2 = 1/3\Sigma_{tr}\Sigma_a$.
- faktor fisi cepat tidak mengalami perubahan, $\epsilon =$ konstan.
- Faktor reproduksi tidak mengalami perubahan karena hanya fungsi dari sifat bahan bakar saja, $\eta = \nu\Sigma_f^F/\Sigma_a^F$.
- Probabilitas lolos resonansi, p, mungkin berubah tergantung dari tampang lintang material racun.
- Faktor penggunaan bahan bakar berbanding terbalik dengan tampang lintang serapan sehingga akan berubah secara drastis.

$$f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M + \Sigma_a^P + \Sigma_a^C} \tag{8.2}$$

  dengan Σ_a^P dan Σ_a^C masing-masing adalah tampang lintang serapan untuk material racun dan batang kendali.

Pengaruh material racun terhadap perubahan reaktivitas adalah

$$\Delta\rho = \rho' - \rho = \left(\frac{k'_{eff} - 1}{k'_{eff}}\right) - \left(\frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}\right) = \frac{1}{k_{eff}}\left(1 - \frac{k_{eff}}{k'_{eff}}\right) = \frac{1}{k_{eff}}\left(1 - \frac{k_\infty P}{k'_\infty P'}\right) \tag{8.3}$$

Karena probabilitas tidak bocor tidak berubah secara signifikan terhadap penambahan material racun, $P/P' \approx 1$, maka Pers. (8.3) menjadi

$$\Delta\rho = \frac{1}{k_{eff}}\left(1 - \frac{f}{f'}\right) \tag{8.4}$$

Jika tampang lintang serapan total dinyatakan dengan Σ_a, maka

$$f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} \tag{8.5}$$

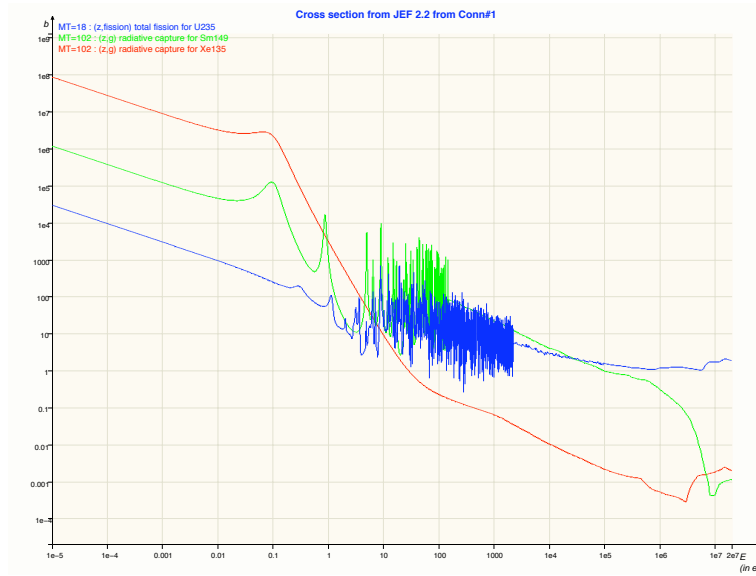
$$f' = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma'_a} \tag{8.6}$$

dengan $\Sigma'_a - \Sigma_a = \Sigma_a^P$ dan $\Sigma_a = \Sigma_a^F + \Sigma_a^M + \Sigma_a^C$. Dengan demikian

$$\Delta\rho = \frac{1}{k_{eff}}\left(1 - \frac{\Sigma'_a}{\Sigma_a}\right) = -\frac{1}{k_{eff}}\frac{\Sigma_a^P}{\Sigma_a} \tag{8.7}$$

8.1. Peracunan xenon

8.1.1. Produksi dan hilangnya Xe-135 selama operasi reaktor

Xe-135 merupakan racun produk fisi yang paling penting dan mempunyai dampak yang sangat besar terhadap operasi reaktor nuklir. Oleh karenanya perlu diketahui bagaimana laju produksi dan laju hilangnya agar dapat digunakan untuk memprediksi respons reaktor. Xe-135 adalah penyerap non-1/v dengan

Gambar 8.1. *Tampang lintang tangkapan radiatif untuk Xe-135 dan Sm-149 serta tampang lintang fisi untuk U-235.*

tampang lintang serapan radiatif (serapan parasitik) neutron termal sebesar $2,6 \times 10^6$ b. Gambar 8.1 menampilkan tampang lintang tangkapan radiatif untuk Xe-135. Tampak pada gambar tersebut tampang lintang fisi untuk U-235 sebagai perbandingan.

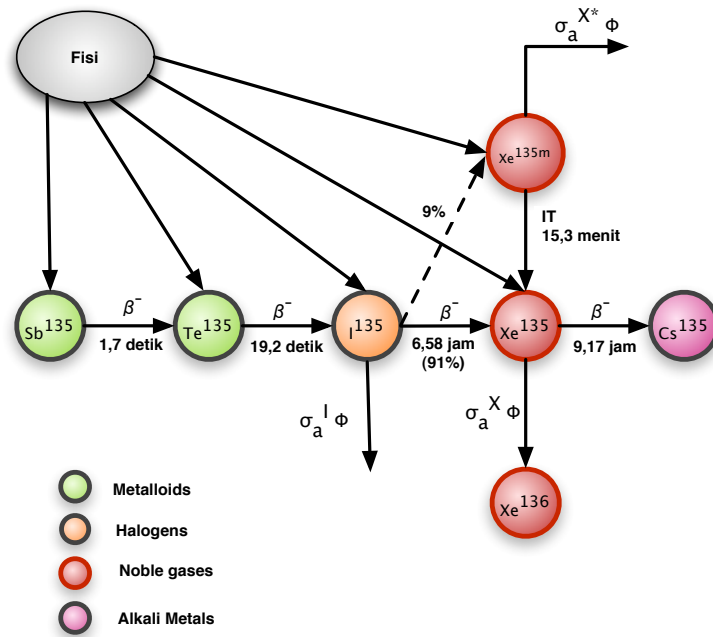
Rantai peluruhan tellurium-135 (Te-135) adalah metode produksi utama Xe-135. Akan tetapi selain dari peluruhan, Xe-135 dapat juga dihasilkan secara langsung dari reaksi fisi. Gambar 8.2 menunjukkan skema pembentukan pembentukan Xe-135. *Fission yield* untuk Xe-135 sekitar 0,3% dan untuk Te-135 sekitar 6%. Xe-135 adalah produk peluruhan β dari I-135 yang terbentuk karena fisi dan peluruhan Te-135. Te-135 adalah produk fisi, tetapi juga dapat terbentuk dari peluruhan β Sb-135 yang juga merupakan produk fisi. Hampir 95% dari Xe-135 yang dihasilkan selama operasi reaktor berasal dari peluruhan I-135.

Jika γ_i menyatakan fraksi *yield* untuk isotop i (yaitu fraksi fragmen-fragmen fisi yang akan menjadi isotop i), dan $PR = \gamma_i \Sigma_f \phi$ merupakan laju produksi isotop i dan mengikuti skema peluruhan seperti pada Gambar 8.2 maka beberapa asumsi dapat dilakukan sebagai berikut:

- Waktu peluruhan Sb-135 dan Te-135 sangat singkat.Jadi dapat diasumsikan bahwa semua Sb-135 dan Te-135 adalah I-135 dengan mendefinisikan

$$\gamma_I = \gamma_{Sb} + \gamma_{Te} + \gamma_I \tag{8.8}$$

- Tampang lintang serapan I-135 sangat kecil di daerah termal sehingga laju serapan I-135 dapat diabaikan.

- Nuklida terakhir pada rantai peluruhan mempunyai umur paro yang sangat panjang. Dengan demikian nuklida stabil dapat dihilangkan dari analisis dan rantai peluruhan dapat disederhanakan

Gambar 8.2. *Skema pembentukan dan hilangnya Xe-135.*

menjadi

$$I^{135} \longrightarrow Xe^{135} \longrightarrow Cs^{135} \tag{8.9}$$

Penyederhanaan ini dapat ditunjukkan seperti pada Gambar 8.3.

- Pada kasus reaktor termal yang homogen, konsentrasi iodium dapat ditentukan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \text{Produksi iodium} - \text{hilangnya iodium} \tag{8.10}$$

atau

$$\frac{dI}{dt} = \gamma_I \Sigma_f \phi - \lambda_I I \tag{8.11}$$

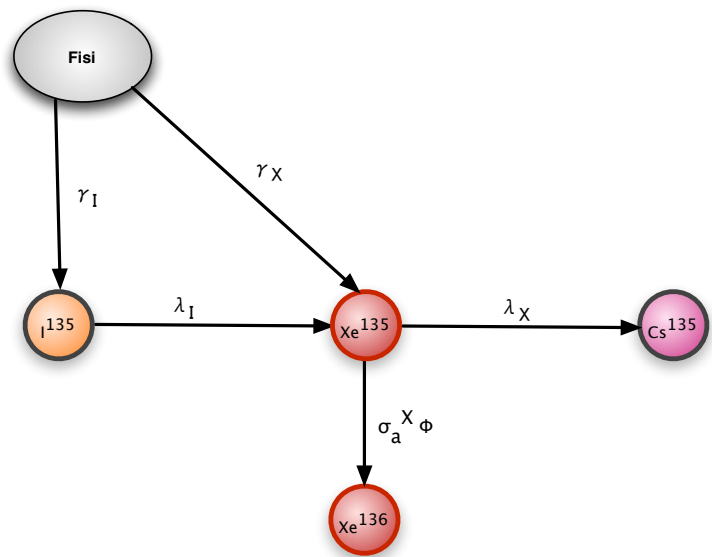
- Dengan asumsi yang sama, perubahan konsentrasi xenon dapat ditentukan dengan

$$\frac{dX}{dt} = \text{Produksi xenon} - \text{hilangnya xenon} \tag{8.12}$$

atau

$$\frac{dX}{dt} = \gamma_X \Sigma_f \phi + \lambda_I I - \left(\lambda_X X + \sigma_a^X \phi\right) \tag{8.13}$$

Data mengenai *yield* maupun konstanta peluruhan dapat dilihat di Tabel 8.1.

Pada kondisi ajeg, laju perubahan konsentrasi kedua nuklida konstan. Dengan kata lain, setelah reaktor dioperasikan cukup lama, tercapai *konsentrasi setimbang*. Dengan membuat Pers. (8.11) dan (8.13) sama dengan nol, konsentrasi setimbang dapat ditentukan.

Gambar 8.3. *Skema yang disederhanakan untuk pembentukan dan hilangnya Xe-135.*

Tabel 8.1. *Yield dan konstanta peluruhan.*

FP Yields	U^{233}	U^{235}	Pu^{239}	Pu^{241}	Decay constant
$\gamma_I(\%)$	4,884	6,386	6,100	7,694	$\lambda_I = 0,1035$/jam
$\gamma_X(\%)$	1,363	0,228	1,087	0,255	$\lambda_X = 0,0753$/jam
$\gamma_P(\%)$	0,66	1,13	1,9		$\lambda_P = 0,0128$/jam

$\sigma_a^X = 3 \cdot 10^5$ barn.
$\sigma_a^S = 5,8 \cdot 10^4$ barn.

- Konsentrasi I-135 setimbang
$$I_\infty = \frac{\gamma_I \Sigma_f \phi}{\lambda_I} \tag{8.14}$$
Konsentrasi setimbang I-135 proporsional terhadap laju reaksi fisi dan tingkat daya.

- Konsentrasi setimbang Xe-135
$$X_\infty = \frac{\gamma_X \Sigma_f \phi + \lambda_I I_\infty}{\lambda_X + \sigma_a^X \phi} = \frac{(\gamma_X + \gamma_I)\,\Sigma_f \phi}{\lambda_X + \sigma_a^X \phi} \tag{8.15}$$
Konsentrasi setimbang Xe-135 meningkat seiring dengan daya karena pembilang proporsional terhadap laju reaksi fisi. Karena fluks termal juga ada di penyebut, jika fluks melebihi 10^{21} neutron/cm^2 detik, suku yang mengandung fluks ini menjadi dominan. Jadi ketika fluks sekitar 10^{15} neutron/cm^2 detik, konsentrasi Xe-135 mendekati nilai batas.

Nilai reaktivitas yang ekivalen dengan efek peracunan xenon setimbang (dengan mengabaikan adanya material kendali) dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini

$$\Delta\rho_0 = \frac{1}{k_{eff}}\left(1 - \frac{\Sigma_a'}{\Sigma_a}\right) = -\frac{1}{k_{eff}}\frac{\Sigma_a^P}{\Sigma_a} \tag{8.16}$$

dengan

$$\Sigma_a^P = X\sigma_a^X = \frac{(\gamma_X + \gamma_I)\,\sigma_a^X \Sigma_f \phi}{\lambda_X + \sigma_a^X \phi} \tag{8.17}$$

Untuk memberikan gambaran tentang perubahan reaktivitas karena akumulasi xenon, sebagai contoh kita melihat pada sebuah reaktor homogen termal yang memiliki bahan bakar U-235 diperkaya 2% dengan data-data sebagai berikut: $\eta = 1,8$; $\nu = 2,42$; $\Sigma_f/\Sigma_a = 0,6$; $\gamma_I + \gamma_X = 0,0066$; $\sigma_a^X = 3 \times 10^6$b; $\lambda_X = 2,1 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$.

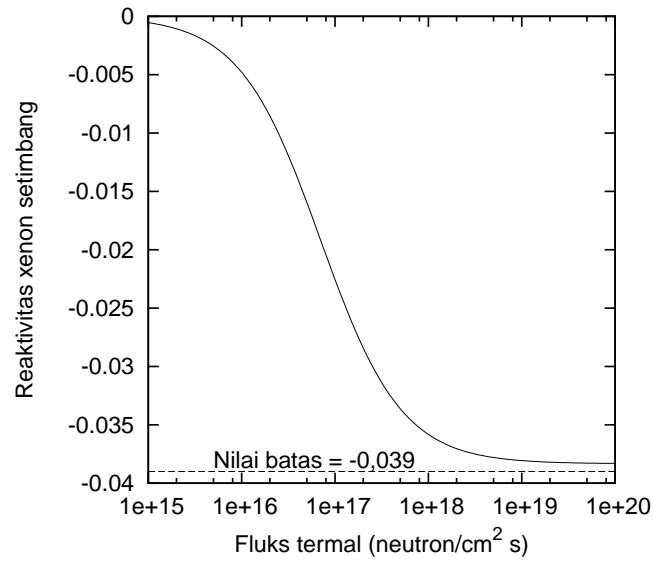
Menggunakan data ini dan Pers. (8.17), kita dapat menuliskan Pers. (8.16) dalam bentuk

$$\Delta\rho = -\frac{1,15 \times 10^{-23}\phi}{2,1 \times 10^{-5} + 3 \times 10^{-22}\phi} \tag{8.18}$$

Gambar 8.4 menunjukkan plot reaktivitas ekivalen untuk konsentrasi setimbang Xe-135. Untuk fluks neutron sebesar 10^{15} n/cm^2 s, perubahan nilai reaktivitas sebesar -6×10^{-4} sehingga efek peracunan dapat diabaikan. Untuk fluks neutron sepuluh kali lebih besar, efek peracunan juga masih rendah, yaitu -0,005 atau dengan kata lain 0,5% dari semua neutron termal diserap oleh sejumlah xenon setimbang. Akan tetapi untuk fluks yang lebih besar dari 10^{16} n/cm^2 s, peracunan meningkat sangat cepat dan nilai pembatasnya diperoleh untuk fluks sebesar 10^{19} n/cm^2 s.

8.1.2. Peracunan xenon setelah reaktor padam

Ketika reaktor padam, fluks neutron berkurang sampai nol dan Xe-135 tidak lagi dihasilkan dari reaksi fisi atau hilang karena serapan.

Mekanisme produksi yang tersisa hanyalah peluruhan I-135 yang berada di teras pada saat reaktor padam. Satu-satunya mekanisme hilangnya Xe-135 adalah peluruhan. Oleh karena itu, jika t_s menyatakan

Gambar 8.4. *Reaktivitas ekivalen untuk konsentrasi Xe-135 setimbang pada contoh reaktor termal.*

waktu setelah reaktor padam, laju perubahan konsentrasi xenon dapat dituliskan menjadi

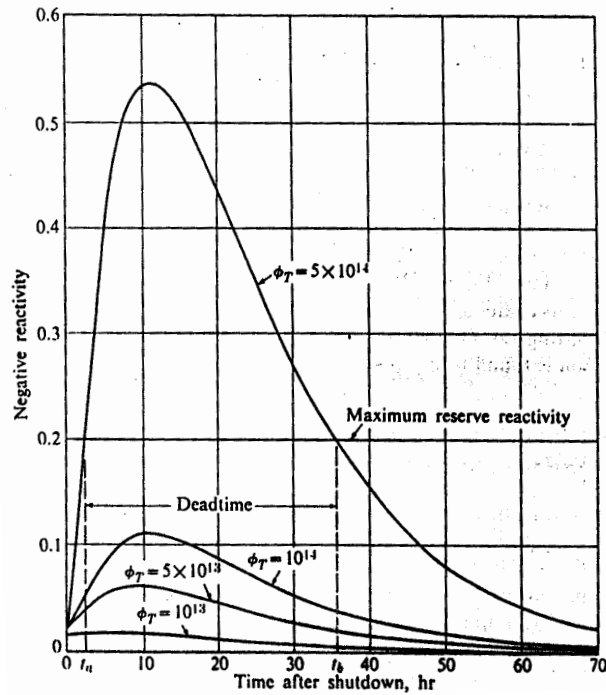
$$\frac{dX}{dt} = \lambda_I I - \lambda_X X = \lambda_I I_\infty \exp(-\lambda_I t_s) - \lambda_X X \tag{8.19}$$

Solusi terhadap Pers. (8.19) memberikan konsentrasi xenon terhadap waktu setelah reaktor padam

$$X = \frac{\lambda_I I_\infty}{\lambda_X - \lambda_I}\left(e^{-\lambda_I t_s} - e^{-\lambda_X t_s}\right) + X_\infty e^{-\lambda_X t_s} \tag{8.20}$$

Waktu agar tercapai konsentrasi maksimum dapat diperoleh sebagai berikut

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_X - \lambda_I} \ln \frac{\lambda_X}{\lambda_I}\left(1 - \frac{\lambda_X - \lambda_I}{\lambda_I}\frac{X_\infty}{I_\infty}\right) \tag{8.21}$$

Karena laju peluruhan I-135 lebih cepat daripada laju peluruhan Xe-135, konsentrasi Xe-135 akan mencapai puncak. Nilai puncak akan dicapai ketika $\lambda_I I = \lambda_X X$ yaitu sekitar 10 sampai dengan 11 jam untuk reaktor termal. Produksi xenon dari peluruhan iodium lebih sedikit daripada hilangnya xenon akibat peluruhannya sendiri. Hal ini menyebabkan konsentrasi Xe-135 berkurang. Konsentrasi I-135 ketika reaktor padam lebih besar apabila fluks neutron sebelum reaktor padam lebih besar. Hal ini akan mempengaruhi puncak dari konsentrasi Xe-135. Gambar 8.5 menunjukkan perubahan konsentrasi Xe-135 setelah reaktor padam sebagai fungsi dari fluks neutron dan waktu setelah padam. Tampak bahwa setelah tercapai puncak konsentrasi Xe-135 sekitar 10 jam setelah reaktor padam, konsentrasi Xe-135 akan berkurang dengan laju yang dikendalikan oleh peluruhan I-135 dan Xe-135.

Gambar 8.5. *Konsentrasi Xe-135 setelah reaktor padam.*

8.2. Peracunan samarium

8.2.1. Produksi dan hilangnya Sm-139 selama operasi reaktor

Selain Xe-135, produk fisi racun yang mempunyai efek penting terhadap operasi reaktor adalah samarium-149 (Sm-149). Pengaruhnya mempunyai signifikansi yang berbeda dibandingkan dengan Xe-135. Sm-149 mempunyai tampang lintang tangkapan radiatif sekitar 5×10^4 b (lihat Tabel 8.1) dan dihasilkan dari peluruhan Nd-149 yang merupakan fragmen fisi (lihat Gambar 8.6). karena Nd-149 meluruh relatif cepat dibandingkan dengan Pm-149, maka dapat diasumsikan bahwa Pm-149 dihasilkan secara langsung dari reaksi fisi dengan *yield* sebesar γ_P.

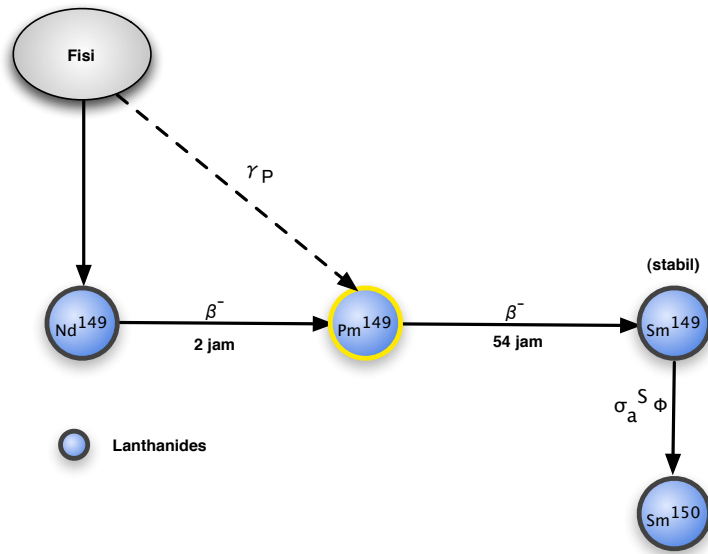
Laju perubahan konsentrasi Pm-149 kemudian dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dP}{dt} = \gamma_P \Sigma_f \phi - \lambda_P P \tag{8.22}$$

Samarium-149 merupakan isotop stabil sehingga ia hanya hilang karena tangkapan radiatif neutron saja

$$\frac{dS}{dt} = \lambda_P P - \sigma_a^S \phi S \tag{8.23}$$

Konsentrasi setimbang untuk kedua isotop racun tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$P_\infty = \frac{\gamma_P \Sigma_f \phi}{\lambda_P} \tag{8.24}$$

Gambar 8.6. *Skema pembentukan dan hilangnya Sm-149.*

dan

$$S_\infty = \frac{\gamma_P \Sigma_f}{\sigma_a^S} \tag{8.25}$$

Tampak dari Pers. (8.25) bahwa konsentrasi setimbang Sm-149 tidak gayut terhadap fluks neutron dan tingkat daya. Seiring dengan perubahan tingkat daya, konsentrasi setimbang Sm-149 akan melalui nilai transien dan kemudian kembali ke nilai awalnya.

8.2.2. Peracunan samarium setelah reaktor padam

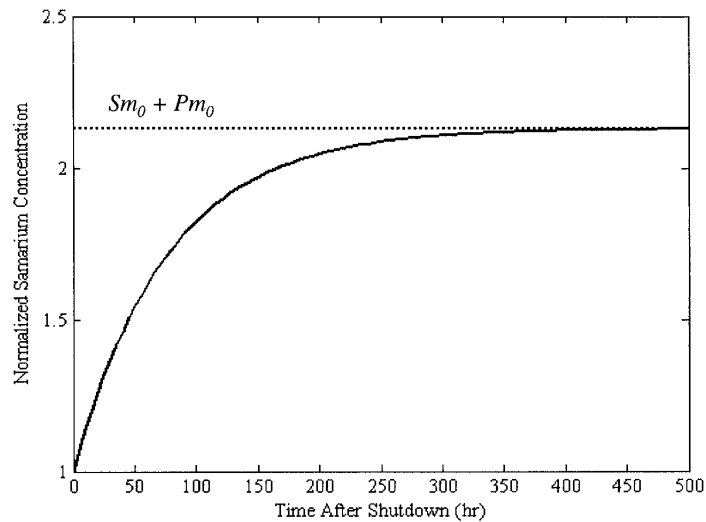
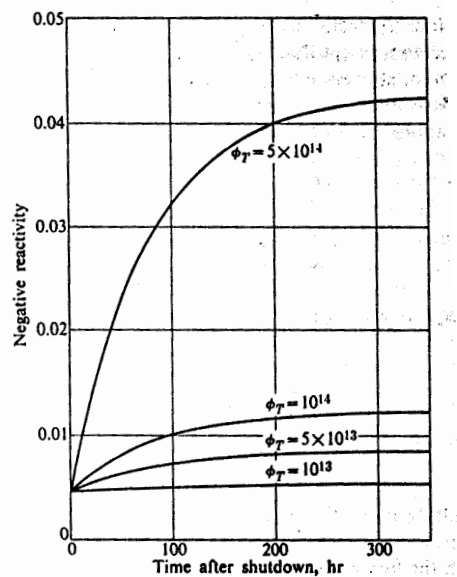
Setelah reaktor padam, Pers. (8.23) untuk produksi Sm-149 berubah menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \lambda_P P \tag{8.26}$$

Dengan menyelesaikan persamaan diferensial yang sederhana ini akan didapatkan relasi konsentrasi samarium sebagai fungsi waktu setelah reaktor padam

$$S(t) = S_\infty + P_\infty \left(1 - e^{-\lambda_P t_s}\right) \tag{8.27}$$

dengan S_∞ dan P_∞ adalah konsentrasi ketika reaktor padam. Karena Sm-149 adalah isotop stabil, ia tidak dapat hilang karena peluruhan sehingga perilakunya setelah reaktor padam sangat berbeda dari Xe-135. Kondisi setimbang tercapai setelah sekitar 20 hari (500 jam). Konsentrasi Sm-149 tetap konstan selama operasi reaktor karena ia bukan radioaktif. Ketika reaktor padam, konsentrasinya bertambah karena peluruhan akumulasi Pm-149. Penambahan setelah reaktor padam tergantung pada tingkat daya sebelum reaktor padam. Konsentrasi Sm-149 tidak mencapai puncak seperti halnya Xe-135, akan tetapi akan naik perlahan-lahan menuju nilai maksimum $S_\infty + P_\infty$. Setelah padam, jika reaktor dioperasikan kembali,

Sm-149 akan terbakar dan konsentrasinya kembali ke nilai setimbang. Peracunan samarium kecil pengaruhnya bila dibandingkan dengan peracunan xenon. Gambar 8.7 menunjukkan pembentukan Sm-149 setelah reaktor padam dan besarnya reaktivitas negatif yang dihasilkan dari pembentukan Sm-149 pada beberapa tingkat fluks ditunjukkan pada Gambar 8.8.

Gambar 8.7. *Pembentukan Sm-149 setelah reaktor padam.*

Gambar 8.8. *Reaktivitas negatif akibat pembentukan Sm-149 setelah reaktor padam untuk tingkat fluks yang berbeda.*

CONTOH SOAL

1. Sebuah reaktor termal menggunakan bahan bakar yang mengandung 2,5% U-235 dan dioperasikan cukup lama pada fluks neutron rata-rata sebesar 2×10^{18} n/m^2-s. Berapa lama setelah reaktor dimatikan peracunan xenon akan mencapai maksimum?

   Jawab: Waktu yang diperlukan untuk mencapai peracunan maksimum dapat dihitung dari Pers. (8.21), dengan nilai-nilai λ_I, λ_X dari tabel dan X_∞ serta I_∞ didapat dari Pers. (8.15) dan (8.14). Untuk fluks neutron sebesar 2×10^{18} n/m^2-s, rasio X_∞/I_∞ menjadi sangat kecil. Dengan demikian, Pers. (8.21) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} t_{max} \approx \frac{1}{\lambda_X - \lambda_I} \ln \frac{\lambda_X}{\lambda_I} &= \frac{1}{0,8 \times 10^{-5}} \ln \frac{2,9}{2,1} \\ &= 4 \times 10^4 \text{ s} \\ &= 11 \text{ jam} \end{aligned}$$

LATIHAN

1. Hitunglah konsentrasi xenon puncak dan setimbang pada teras yang berbahan bakar ^{233}U, ^{235}U dan ^{239}Pu yang semuanya beroperasi pada tingkat fluks termal sebesar 10^{14} n/cm^{-1}-s.

2. Sebuah reaktor berbahan bakar ^{235}U yang beroperasi dengan fluks termal sebesar 5×10^{13} n/cm^{-1}-s dimatikan (*scram*) ketika reaktor memiliki reaktivitas cadangan (*reserve reactivity*) sebesar 5%. Tentukan waktu dimulainya *deadtime* dan durasinya.

3. Sebuah perangkat subkritis memiliki fluks neutron sebesar $\phi_0 = 10^6$ n/cm^{-1}-s yang dipertahankan konstan oleh sumber neutron eksternal. Berapa lama sumber tersebut harus berada di reaktor sebelum konsentrasi xenon dan samarium mencapai 90% dari nilai jenuhnya ?

4. Pada kondisi operasi *load following*, sebuah reaktor beroperasi setiap hari dengan daya penuh selama 12 jam kemudian diikuti dengan *shutdown* selama 12 jam.

   Hitunglah konsentrasi iodine, $I(t)$ dalam rentang waktu 24 jam. Gunakan syarat batas periodik, $I(24\,\text{jam}) = I(0)$.

Bab 9

Deplesi Bahan Bakar dan Konversi

A happy man is too satisfied with the present to dwell too much on the future.

ALBERT EINSTEIN

Learning outcomes :

- Mampu mengidentikasi perilaku dinamis reaktor.
- Mampu menjelaskan pengaruh deplesi dan konversi bahan bakar serta peracunan produk fisi terhadap reaktivitas reaktor.

Minggu ke : 12

BERSAMAAN dengan pengambilan energi dari reaktor, komposisi bahan bakar mengalami perubahan sebagai akibat dari hilangnya material dapat belah karena fisi, adanya pembentukan dan peluruhan produk fisi dan transmutasi material reaktor yang lain akibat tangkapan neutron. Perubahan komposisi ini berlangsung pada rentang waktu yang cukup lama. Untuk reaktor tipe air ringan, pembelahan satu gram material bahan bakar menghasilkan satu megawatt-hari energi termal. Daya spesifik reaktor semacam ini kira-kira 30 W/g, sehingga fraksi bahan bakar yang membelah per hari hanyalah satu bagian dari 30.000.

Analisis terhadap deplesi bahan bakar sangat penting dilakukan karena adanya tiga aspek berikut ini:

1. Laju hilangnya reaktivitas terkait dengan deplesi bahan bakar dan produksi energi yang diperkirakan selama siklus.
2. Perubahan distribusi daya terkait dengan deplesi, termasuk di dalmnya pengaruh penyesuaian batang kendali untuk mempertahankan kritikalitas.

3. Perubahan komposisi bahan bakar, dengan penekanan khusus pada isotop-isotop yang mempunyai nilai ekonomis yang tinggi sehingga biaya siklus bahan bakar dapat dievaluasi dengan akurat.

9.1. Persamaan dasar transmutasi dan peluruhan isotop

Selama operasi dalam tingkat daya, semua material yang menyusun reaktor akan mengalami perubahan akibat adanya interaksi dengan neutron. Anggap satu titik tunggal di dalam reaktor dengan fluks neutron skalar satu grup sebesar ϕ. Persamaan dasar untuk transmutasi isotop dan peluruhan radioaktif adalah sebagai berikut

$$\frac{dN^i}{dt} = \underbrace{\lambda^j N^j + \sigma_c^k \phi N^k + \gamma^i \Sigma_f \phi}_{\text{Produksi}} - \underbrace{\lambda^i N^i - \sigma_a^i \phi N^i}_{\text{hilang}} \tag{9.1}$$

Laju perubahan konsentrasi isotop i pada Pers. (9.1) berdasarkan pada tiga mode produksi dan dua mode hilang. Mode produksi adalah sebagai berikut:

1. Suku pertama menyatakan produksi dari peluruhan radioaktif dari spesies prekursor, N^j, dengan konstanta peluruhan, λ^j. Produksi satu isotop tertentu bisa saja dari lebih dari satu jenis peluruhan. Sebagai contoh Pu-238 dapat dihasilkan dari peluruhan alfa pada Cu-242 atau dari peluruhan beta pada Np-238.

2. Suku kedua menyatakan produksi karena tangkapan neutron dengan spesies prekursor N^k dengan tampang lintang mikroskopik reaksi tangkapan sebesar σ_c^k. Di sini bisa saja isotop tertentu diproduksi oleh lebih dari satu spesies prekursor. Misal, U-237 dihasilkan dari reaksi (n, γ) pada U-236 dan juga dari reaksi $(n, 2n)$ pada U-238.

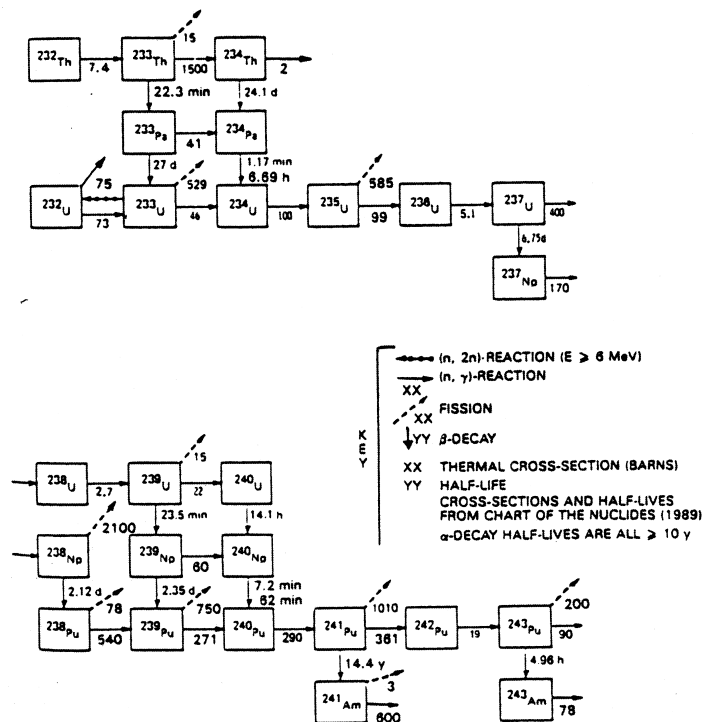
3. Suku terakhir pada Pers. (9.1) menyatakan suku produksi untuk produk fisi, di mana nilai *yield*, γ^i, tergantung kepada isotop yang membelah dan energi neutron yang menyebabkan pembelahan.

Dua mode yang menyebabkan konsentrasi isotop i berkurang adalah

1. jika isotop i bersifat radioaktif, maka ia dapat hilang karena peluruhan radioaktif dengan konstanta peluruhan sebesar λ_i.

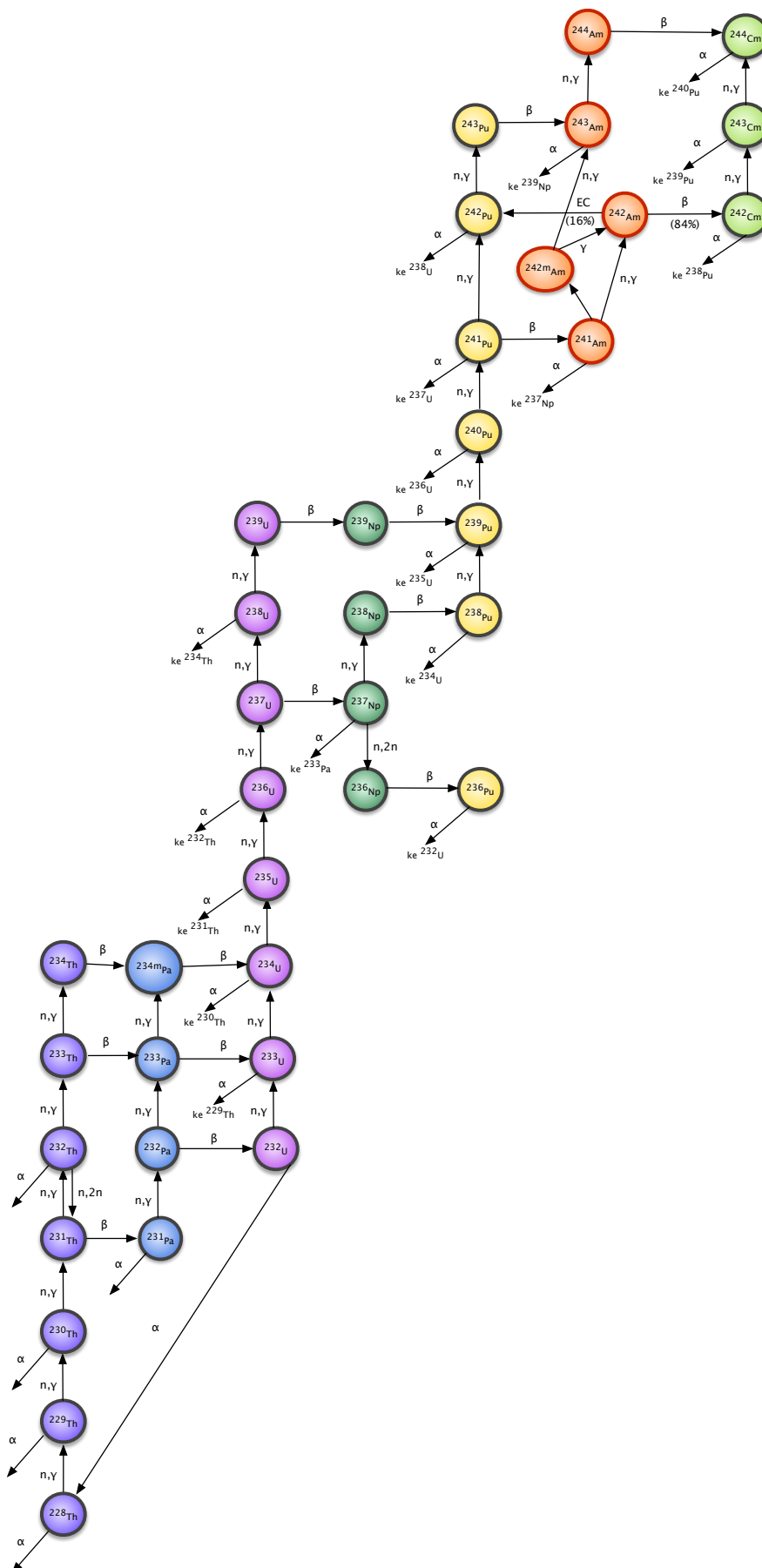
2. Suku terakhir pada Pers. (9.1) menyatakan hilangnya isotop akibat serapan neutron, dengan tampang lintang serapan mikroskopik sebesar σ_a^i.

Semua reaktor daya terdiri dari material fisil dan fertil. Material fertil adalah material yang dapat berubah baik secara langsung maupun tidak langsung menjadi material fisil dengan jalan menangkap neutron. Dua material fertil yang umum adalah U-238 dan Th-232. Gambar 9.1 menunjukkan rantai transmutasi-peluruhan untuk kedua material fertil tersebut. Jika tankapan pada material fertil melebihi serapan pada material fisil, maka reaktor akan membiakkan material fisil sehingga disebut dengan reaktor pembiak. Rasio antara material fisil yang diproduksi terhadap material fisil yang hilang pada satu waktu tertentu disebut dengan rasio pembiakan seketika (*instantaneous breeding ratio*). Jika laju produksi material fisil lebih kecil daripada laju hilangnya material fisil, maka reaktornya disebut dengan reaktor konverter.

Sebagian besar reaktor termal adalah reaktor konverter meskipun pembiakan bisa saja berlangsung pada reaktor termal yang menggunakan sistem Th-U^{233}. Rasio pembiakan terbesar yang mungkin adalah dengan sistem U^{238}-Pu dengan spektrum neutron cepat dengan rasio pembiakan antara 1,25 sampai dengan 1,4.

Gambar 9.1. *Rantai peluruhan - transmutasi U-238 dan Th-232.*

Rantai peluruhan-transmutasi untuk thorium, uranium dan transuranium yang lebih detail dapat dilihat di Gambar 9.2. Perlu diperhatikan bahwa gambar tersebut tidak menyertakan reaksi fisi.

9.1.1. Rantai transmutasi U-238

Dalam menuliskan persamaan untuk produksi dan hilangnya berbagai isotop pada suatu rantai, kita akan menggunakan konvensi di mana setiap isotop dinyatakan dengan superskrip dua digit. Digit pertama adalah selisih antara nomer atom inti atom dengan bilangan 90 dan digit kedua adalah digit terakhir pada nomer massa. Jadi konsentrasi U-238 dinyatakan dengan N^{28} dan Pu-239 dinyatakan dengan N^{49}. Persamaan diferensial yang menggambarkan rantai transmutasi U-238 berdasar Gambar 9.1 adalah

Gambar 9.2. *Rantai peluruhan - transmutasi thorium, uranium dan transuranium.*

$$\frac{dN^{28}}{dt} = -\sigma_a^{28}\phi N^{28} \tag{9.2}$$
$$\frac{dN^{29}}{dt} = \sigma_\gamma^{28}\phi N^{28} - \left(\lambda^{29} + \sigma_a^{29}\phi\right) N^{29} \tag{9.3}$$
$$\frac{dN^{36}}{dt} = \sigma_{n,2n}^{37}\phi N^{37} - \left(\lambda^{36} + \sigma_a^{36}\phi\right) N^{36} \tag{9.4}$$
$$\frac{dN^{37}}{dt} = \lambda^{27} N^{27} - \sigma_a^{27}\phi N^{27} \tag{9.5}$$
$$\frac{dN^{38}}{dt} = \sigma_\gamma^{37}\phi N^{37} - \left(\lambda^{38} + \sigma_a^{38}\phi\right) N^{38} \tag{9.6}$$
$$\frac{dN^{39}}{dt} = \lambda^{29} N^{29} - \left(\lambda^{39} + \sigma_a^{39}\phi\right) N^{39} \tag{9.7}$$
$$\frac{dN^{48}}{dt} = \lambda^{38} N^{38} - \sigma_a^{48}\phi N^{48} \tag{9.8}$$
$$\frac{dN^{49}}{dt} = \lambda^{39} N^{39} - \sigma_a^{49}\phi N^{49} + \sigma_\gamma^{48}\phi N^{48} \tag{9.9}$$
$$\frac{dN^{40}}{dt} = \sigma_\gamma^{49}\phi N^{49} - \sigma_a^{40}\phi N^{40} + \sigma_\gamma^{29}\phi N^{29} + \sigma_\gamma^{39}\phi N^{39} \tag{9.10}$$
$$\frac{dN^{41}}{dt} = \sigma_\gamma^{40}\phi N^{40} - \left(\lambda^{41} + \sigma_a^{41}\phi)\right) N^{41} \tag{9.11}$$
$$\frac{dN^{42}}{dt} = \sigma_\gamma^{41}\phi N^{41} - \sigma_a^{42}\phi N^{42} \tag{9.12}$$
$$\frac{dN^{43}}{dt} = \sigma_\gamma^{42}\phi N^{42} - \left(\lambda^{43} + \sigma_a^{43}\phi\right) N^{43} \tag{9.13}$$
$$\frac{dN^{51}}{dt} = \lambda^{41} N^{41} - \left(\lambda^{51} + \sigma_a^{51}\phi\right) N^{51} \tag{9.14}$$
$$\frac{dN^{52}}{dt} = \sigma_\gamma^{51}\phi N^{51} - \sigma_a^{52}\phi N^{52} \tag{9.15}$$
$$\frac{dN^{53}}{dt} = \lambda^{43} N^{43} - \sigma_a^{53}\phi N^{53} + \sigma_\gamma^{52}\phi N^{52} \tag{9.16}$$

Tabel 9.1 menampilkan tabulasi data nuklir untuk material fisil dan fertil yang telah dirata-rata sesuai spektrum termal reaktor air ringan dengan energi batas termal sebesar 0,63 eV.

9.1.2. Rantai transmutasi Th-232

Produk transmutasi utama dari serapan pada Th-232 adalah U-233 yang merupakan konverter paling efisien untuk spektrum termal. Hal ini juga telah ditunjukkan pada Tabel 9.1 yang membandingkan tampang lintang mikroskopik serapan, neutron yang dihasilkan per fisi (ν) dan neutron yang dihasilkan per serapan ($\overline{\eta}$). Karena banyaknya neutron maksimum yang tersedia untuk serapan pada material fertil adalah $\eta - 1$, tampak bahwa U-233 lebih baik daripada U-235 ataupun Pu-239 pada spektrum neutron termal. Akan tetapi kesimpulan ini dibatasi oleh dua hal. Yang pertama, Tabel 9.1 hanya memperhitungkan efek spektrum termal. Pada spektrum non-termal, fraksi tangkapan radiatif U-233 lebih besar daripada fraksi pada spektrum termal, sehingga hal ini akan menyebabkan penurunan nilai η dan rasio konversi.

Tabel 9.1. *Data nuklir untuk material fisil dan fertil sesuai spektrum termal LWR.*

Isotop fisil	$\bar{\sigma}_a$ (b)	$\bar{\sigma}_f$ (b)	ν	$\bar{\eta}$
U-233	326	298	2,49	2,27
U-235	344	293	2,42	2,06
Pu-239	1203	770	2,87	1,84
Pu-241	1056	782	2,93	2,17
Isotop fertil				
Th-232	4,0			
U-238	1,5			
Pu-240	196			

Kesulitan yang kedua dapat diilustrasikan dari Gambar 9.1. Persamaan-persamaan untuk produksi U-233 harus memperhitungkan tangkapan neutron isotop prekursor

$$\frac{dN^{02}}{dt} = -\sigma_a^{02}\phi N^{02} \tag{9.17}$$

$$\frac{dN^{03}}{dt} = \sigma_\gamma^{02}\phi N^{02} - (\lambda^{03} + \sigma_a^{03}\phi)N^{03} \tag{9.18}$$

$$\frac{dN^{13}}{dt} = \lambda^{03}N^{03} - (\lambda^{13} + \sigma_a^{13}\phi)N^{13} \tag{9.19}$$

$$\frac{dN^{22}}{dt} = -(\lambda^{22} + \sigma_a^{22}\phi)N^{22} \tag{9.20}$$

$$\frac{dN^{23}}{dt} = \sigma_\gamma^{22}\phi N^{22} + \lambda^{13}N^{13} - \sigma_a^{25}\phi N^{23} \tag{9.21}$$

Dua tingkat peluruhan radioaktif diperlukan di antara produksi Th-233 dan produksi U-233. Pada setiap tingkat terdapat kompetisi antara dua proses hilang yaitu peluruhan radioaktif dan tangkapan neutron. Jika Th-233 maupun Pa-233 menangkap satu neutron, maka satu atom U-233 yang potensial untuk terbentuk akan hilang.

Jika kita menyelesaikan Pers. (9.17) sampai (9.19) dan mensubstitusi hasilnya ke Pers. (9.21) untuk suku produksi U-233 (pengaruh dari peluruhan U-232 atau Pers. (9.20) kita abaikan) serta kita anggap Th-233 dan U-233 dalam keadaan setimbang sekuler, maka akan didapatkan

$$\begin{aligned} P^{23} &= \text{laju produksi U-233} \\ &= \lambda^{13}N^{13} \\ &\approx \frac{\lambda^{03}}{(\lambda^{03} + \sigma_a^{03}\phi - \sigma_a^{02}\phi)} \frac{\lambda^{13}}{(\lambda^{13} + \sigma_a^{13}\phi - \sigma_a^{02}\phi)} \sigma_a^{02} N_0^{02} e^{-\sigma_a^{02}\phi t} \end{aligned} \tag{9.22}$$

Tabel 9.2 menampilkan data yang diperlukan untuk mengevaluasi Pers. (9.22) untuk fluks neutron termal seesar 10^{14} n/cm^2-s. Kolom 1 dan 2 menyatakan tampang lintang serapan pada energi 0,025 eV dan integral resonansi *infinite dilution* (tanpa *self-shielding*) untuk masing-masing isotop. Kolom 3 adalah tampang lintang termal “efektif” yang memperhitungkan efek serapan resonansi. Hasil kali antara tam-

Tabel 9.2. *Karakteristik serapan neutron dan peluruhan isotop-isotop prekursor U-233 dengan fluks sebesar* $\phi = 10^{14}$ *n/cm*^{2}*-s.*

	σ_a (0,025) (barn)	RI$_\infty$ (barn)	σ_a^{eff} (barn)	$\sigma_a^{eff}\phi$ (s^{-1})	λ (s^{-1})	$\frac{\lambda}{\sigma_a^{eff}\phi + \lambda}$
Th-232	7,4	85	25	$2,5 \times 10^{-2}$	–	–
Th-233	1500	400	1600	$1,6 \times 10^{-7}$	$5,2 \times 10^{-4}$	0,9997
Pa-233	41	895	220	$2,2 \times 10^{-8}$	$3,0 \times 10^{-7}$	0,9320

pang lintang ini dengan fluks neutron termal akan menghasilkan laju reaksi total per atom. Dua kolom terakhir membandingkan laju reaksi relatif pada fluks termal sebesar 10^{14} n/cm^2-s. Tampang lintang serapan Th-232 relatif kecil sehingga kita dapat mengabaikannya relatif terhadap suku lain dan Pers. (9.22) dapat dituliskan kembali sebagai beikut

$$P^{23} \approx \frac{\lambda^{03}}{(\lambda^{03} + \sigma_a^{03}\phi)} \frac{\lambda^{13}}{(\lambda^{13} + \sigma_a^{13}\phi)} \sigma_a^{02} N_0^{02} e^{-\sigma_a^{02}\phi t} \tag{9.23}$$

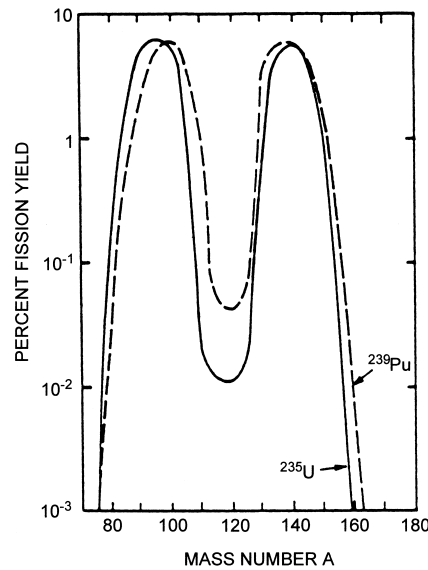
Dua suku pertama di dalam tanda kurung masing-masing menyatakan "efisiensi" di mana atom U-233 potensial dapat melewati setiap tingkat peluruhan. Perlu diperhatikan bahwa laju produksi U-233 potensial berkurang sebesar 6,8% sebagai akibat tangkapan neutron pada Pa-233 pada tingkat fluks neutron termal sebesar 10^{14}. Jika tingkat fluks neutron meningkat, nilai efisiensinya akan semakin berkurang.

Nilai laju reaksi relatif yang tampak pada Tabel 9.2 gayut kepada desain reaktor dan juga pada besarnya fluks neutron. Penggunaan integral resonansi *infinite dilution* untuk Th-232 sebenarnya tidak tepat karena konsentrasinya cukup tinggi sehingga mengurangi tampang lintang efektif sebesar dua kalinya. Sebagian besar desain reaktor yang menggunakan siklus Th^{232}–U menggunakan bahan bakar yang disusun sedemikian rupa sehingga produksi daya dan konversi berlangsung pada daerah yang berbeda sehingga Pa-233 terkena fluks yang lebih rendah daripada U-233.

Diskusi di atas menggambarkan salah satu problem dalam desain untuk jenis reaktor ini. Jika reaktor didesain untuk beroperasi dengan daya spesifik yang bernilai besar agar dapat mengurangi inventori bahan bakar, nilai rasio konversi akan berkurang karena serapan parasitik pada Pa-233.

9.2. Produk fisi

Setiap peristiwa fisi menghasilkan dua inti atom yang massanya tidak sama persis dengan setengah dari massa inti yang mengalami pembelahan, akan tetapi terdistribusi dengan puncak sekitar 100 dan 140 amu. Isotop-isotop tersebut cenderung kaya akan neutron dan mengalami peluruhan serta menangkap neutron. Dengan demikian akan terbentuk ratusan jenis isotop produk fisi ini. Kandungan produk fisi di dalam reaktor menimbulkan sejumlah permasalahan yang harus dipertimbangkan dalam menganalisis perilaku setiap siklus bahan bakar. Beberapa di antaranya adalah sebagai berikut:

1. Desain struktur elemen bahan bakar harus mampu mengakomodasi pembentukan baik produk-produk fisi berbentuk gas maupun padatan selama umur waktu bahan bakar yang diperkirakan.

Gambar 9.3. *Kurva yield produk fisi.*

2. Penanganan dan perisai limbah sistem primer harus didesain untuk mengakoodosasi pelepasan produk fisi ke pendingin seandainya sejumlah kecil elemen bahan bakar gagal.
3. Sistem pengambilan kalor harus mampu mengambil kalor yang dibangkitkan oleh produk fisi dan peluruhan produk transmutasi setelah reaktor padam.
4. Sistem keselamatan terekayasa (*engineered safety system*) pada pembangkit harus didesain dan dioperasikan untuk mengakomodasi kalor peluruhan setelah terjadi kecelakaan hilangnya pendingin (LOCA, *Loss-of-Coolant Accident*).
5. Karakteristik serapan neutron pada produk fisi harus dipertimbangkan untuk analisis deplesi reaktivitas.

Gambar 9.3 menunjukkan kurva *yield* produk fisi dari pembelahan pada U-235 dan Pu-239. Bentuk punuk ganda (seperti pada punggung onta) merupakan karakteristik semua kurva *yield* karena fisi termal. Tabel 9.3 menunjukkan inventori beberapa isotop produk fisi beserta karakteristiknya.

Untuk menghitung pengaruh terbentuknya produk fisi terhadap reaktivitas, tentunya harus dihitung inventori produk fisi menggunakan sejumlah persamaan diferensial terkopel seperti Pers. (9.1). Hal ini membutuhkan sistem persamaan yang terdiri dari lebih dari 300 persamaan terkopel serta sejumlah besar pustaka data nuklir. Produk fisi yang mempunyai efek reaktivitas yang besar seperti xenon-135 dan samarium-149 akan dibahas pada bab 8.

Meskipun produk fisi mengalami transmutasi dan peluruhan, kandungan total produk fisi langsung ditambah "keturunannya" akan meningkat dengan waktu

$$\frac{dn_{fp}}{dt} = \sum_j \frac{dn_j}{dt} = \sum_j \gamma_j \Sigma_f \phi \tag{9.24}$$

Tabel 9.3. *Inventori isotop produk fisi dan karakteristiknya.*

Nuklida	**Inventory** (10^6 Ci)	**Jenis Peluruhan**	**Energi** (MeV)	**Umur Paro**
Kr-88	82	γ	1,55	2,77 jam
Sr-89	113	β^-	1,46	51 hari
Sr-90		β^-	0,5	28,5 tahun
Tl-132	144	β^-, γ		77 jam
Sb-129	40	β^-		4,2 jam
I-131	102	β^-, γ	0,61/0,8/0,36/0,64	8,0 hari
I-132	144	β^-, γ		2,4 jam
I-133	204	β^-, γ		20,5 jam
I-135	180	γ	1,8	6,75 jam
Cs-134	9	β^-	0,6	2,2 tahun
Cs-137	6	β^-, γ	0,51/1,7/0,6	30 tahun
Ba-140	192	β^-	1	12,8 hari
La-140	192	γ	1,6	1,68 hari

Basis perhitungan: PWR 3700 MWt

9.3. Metode solusi persamaan deplesi

Analisis deplesi bahan bakar mengikutsertakan sejumlah proses nuklir. Proses-proses ini secara umum dapat diklasifikasikan menjadi perhitungan-perhitungan yang melibatkan: (a) penyelesaian persamaan deplesi isotop (untuk mendapatkan densitas inti atom sebagai fungsi waktu dan posisi; perhitungan ini memerlukan pengetahuan tentang fluks neutron) dan (b) penyelesaian persamaan difusi multigrup statik untuk fluks neutron (tugas ini biasanya juga melibatkan pengkoplingan termohidrolik, penggunaan tampang lintang yang mencirikan isotop-isotop yang terdeplesi sebagai input dan penyesuaian sistem kendali untuk mencapai kritikalitas teras.) Cara yang biasa digunakan adalah dengan melakukan de-kopel perhitungan-perhitungan ini sehingga persamaan deplesi dapat diselesaikan pada interval waktu di mana fluks neutron atau daya dapat dianggap konstan. Pada akhir setiap interval waktu, densitas yang telah terdeplesi digunakan untuk menghitung konstanta-konstanta grup yang baru dan persamaan difusi multigrup diselesaikan untuk menentukan bentuk fluks yang baru untuk interval waktu selanjutnya.

9.3.1. Persamaan deplesi isotop

Dasar penyelesaian persamaan deplesi dapat disusun berdasar Pers. (9.1) yang dapat dituliskan lagi sebagai berikut

$$\frac{dN^A}{dt} = -\lambda^A N^A - \left[\sum_g \sigma_{ag}^A \phi_g\right] N^A + \lambda^B N^B + \left[\sum_g \sigma_{\gamma g}^C \phi_g\right] N^C \tag{9.25}$$

dengan $\lambda^A N^A$ adalah suku yang menyatakan hilang karena peluruhan radioaktif isotop A, $\left[\sum_g \sigma_{ag}^A \phi_g\right] N^A$ adalah suku hilang karena tangkapan neutron pada isotop A, $\lambda^B N^B$ adalah suku yang menyatakan bertambahnya isotop A karena peluruhan isotop B, dan $\left[\sum_g \sigma_{\gamma g}^C \phi_g\right] N^C$ adalah suku bertambahnya isotop A karena transmutasi isotop C via tangkapan neutron.

Fluks neutron dan tampang lintang mikroskopik yang muncul pada Pers. (9.25) merupakan nilai rerata multigrup dan harus dibangkitkan dengan program pembangkitan konstanta grup dan perhitungan difusi multigrup.

Persamaan ini bersifat tidak linear dan tidak homogen karena fluks neutron dan tampang lintang mikroskopik tidak hanya bervariasi terhadap ruang dan waktu tetapi juga tergantung kepada densitas isotop-isotop yang terdeplesi. Persamaan-persamaan ini harus dituliskan untuk masing-masing isotop yang terkait. Pada analisis deplesi bahan bakar yang detail pada reaktor nuklir modern, diperlukan perhitungan untuk sekitar 15–24 nuklida berat dan 25–50 produk fisi. Apabila kita tambahkan persamaan diferensial yang menggambarkan deplesi isotop dengan konstanta peluruhan yang panjang dan pendek, maka perhitungan memerlukan solusi numerik yang lebih kompleks.

9.3.2. Pembangkitan konstanta grup

Salah satu hal yang penting dalam perhitungan deplesi adalah pembangkitan konstanta grup yang dipelukan. Konstanta-konstanta grup ini diperlukan tidak hanya untuk persamaan difusi multigrup, tetapi juga untuk persamaan laju isotop. Konstanta grup terdiri dari dua faktor, yaitu

1. densitas yang harus disediakan dari modul deplesi

2. konstanta grup mikroskopis yang dibangkitkan baik oleh program spektrum cepat dan termal atau oleh parameterisasi

$$\Sigma_{xg}(\mathbf{r}, t) = \sum_j N^j(\mathbf{r}, t)\sigma_{xg}^j(\mathbf{r}, t) \tag{9.26}$$

Tampang lintang mikroskopik akan berubah terhadap waktu seiring dengan deplesi bahan bakar karena adanya perubahan spektrum neutron pada sel bahan bakar dan pengaruh *self-shielding*. Tampang lintang ini banyak yang sangat lambat perubahannya sehingga mereka hanya perlu dihitung ulang pada interval beberapa langkah waktu perhitungan dan dapat diinterpolasi pada waktu-waktu antara. Pada tampang lintang yang berubah lebih cepat yang sangat mempengaruhi faktor *self-shielding* maupun spektrum perlu dilakukan penyesuaian dengan interval waktu yang lebih singkat.

9.3.3. Perhitungan fluks-daya

Setelah diperoleh konstanta-konstanta grup, langkah selanjutnya adalah menggunakan mereka pada persamaan difusi multigrup untuk menentukan distribusi fluks dan daya di dalam teras reaktor. Interaksi dengan modul penyesuaian sistem kendali biasanya diperlukan untuk menyesuaikan faktor perlipatan agar kembali menjadi kritis setelah langkah perhitungan deplesi.

9.3.4. Solusi persamaan deplesi

Solusi langsung terhadap persamaan terkopel yang mendeskripsikan banyaknya densitas material teras dan persamaan difusi multigrup yang mendeskripsikan fluks neutron adalah tidak praktis. Sebagai gantinya kita harus memisahkan perhitungan-perhitungan tersebut. Kopling antara persamaan deplesi dan neutronika dapat ditangani dengan satu dari beberapa cara:

1. Perlakuan spasial
   Persamaan difusi multigrup harus diselesaikan beberapa kali seiring dengan proses deplesi. Solusi semacam ini menjadi sangat mahal jika diperlukan perlakuan spasial. Kita dapat membedakan dua klas yang berbeda:

   (a) burnup makroskopik
   Pada studi secara makroskopik, fokus kita adalah menentukan perilaku deplesi global pada teras reaktor. Lebih khusus lagi, studi semacam ini dilakukan untuk menentukan perilaku variasi reaktivitas jangka panjang dan umur teras, distribusi daya teras dan burnup, serta inventori material bahan bakar teras total.

   (b) burnup mikroskopik
   Pada studi secara mikroskopik, fokus kita adalah perhitungan secara akurat terhadap laju reaksi dan komposisi bahan bakar sebagai fungsi dari burnup pada satu titik atau di dalam satu sel yang mewakili daerah tertentu pada teras reaktor. Atau dengan kata lain, studi secara mikroskopik lebih fokus kepada analisis deplesi pada sel satuan saja. Perhitungan secara mikroskopik ini digunakan untuk menyedikanan tampang lintang homogen atau efektif yang diperlukan untuk studi deplesi global makroskopik.

2. Perlakuan waktu
   Perlakuan kegayutan waktu pada deplesi dan perubahan distribusi fluks biasanya ditangani dengan memisahkan perhitungan deplesi dari perhitungan neutronika. Untuk menggambarkan pendekatan ini, anggap bahwa kita mengetahui densitas nuklida pada teras yang bersih dan baru pada waktu $t = 0$. Kemudian konstanta grup makroskopik dapat dibangkitkan dan fluks multigrup dapat dihitung (meskipun penyesuaian sistem kontrol masih diperlukan untuk mencapai kritikalitas teras).

   Selanjutnya persamaan deplesi diselesaikan untuk waktu $0 < t < \Delta t$ dengan mengasumsikan bahwa sepanjang langkah waktu perhitungan baik untuk:

   - fluks konstan pada waktu $0 < t < \Delta t$:

   $$\phi_g(\mathbf{r}, t) = \phi_g(\mathbf{r}, 0) \tag{9.27}$$

   - atau densitas daya konstan pada waktu $0 < t < \Delta t$:

   $$\Sigma_{fg}(\mathbf{r}, t)\phi_g(\mathbf{r}, t) = \sum_j N^j(\mathbf{r}, t)\sigma^j_{fg}\phi(\mathbf{r}, t) = \Sigma_{fg}(\mathbf{r}, 0)\phi(\mathbf{r}, 0) \tag{9.28}$$

Yang sering digunakan adalah pendekatan fluks konstan karena asumsi densitas daya konstan sulit diterapan untuk lebih dari satu isotop fisil. Dengan asumsi semacam ini persamaan deplesi isotop dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{N}(t), t) \times \mathbf{N}(t) \tag{9.29}$$

dengan **N** adalah vektor kolom yang berisi komponen konsentrasi spesies yang berbeda, dan **A** adalah matriks yang tergantung baik pada waktu dan konsentrasi spesies yang berbeda akibat fluks neutron.

Persamaan (9.29) biasanya diselesaikan menggunakan metode *predictor-corrector*, yang merupakan kombinasi dari skema penyelesaian Euler maju (eksplisit) dan skema Euler mundur (implisit).

Sudah barang tentu kita harus memilih ukuran langkah waktu deplesi, Δt, sedemikian rupa sehingga perubahan fluks neutron dapat diabaikan sepanjang langkah waktu ini. Secara umum, akurasi dari solusi tergantung kepada Δt yang dipilih. Biasanya diambil $(\lambda^j + \sigma_a^j \phi)\Delta t \ll 1$ untuk semua isotop yang terlibat. Dengan alasan ini, adalah sangat menguntungkan jika persamaan-persamaan produksi-destruksi diformulasi ulang untuk menghilangkan fenomena skala waktu pendek yang tidak mengganggu hasil keseluruhan.

Setelah diperoleh banyaknya densitas, N, pada waktu $t = \Delta t$, kita sekarang dapat membangkitkan konstanta multigrup yang baru dan kemudian menggunakannya untuk menghitung distribusi fluks multigrup yang baru.

Skema semacam ini dapat diteruskan untuk langkah waktu selanjutnya, $\Delta t < t < 2\Delta t$ (yang bisa saja ukurannya berbeda) dan seterusnya sampai reaktivitas lebih (*excess reactivity*) teras turun cukup rendah sehingga umur teras telah tercapai (dengan kata lain reaktor tidak dapat dioperasikan lagi).

Dengan menggunakan metode ekspansi Taylor orde 1, Pers. (9.29) dapat didekati dengan skema eksplisit atau metode Euler maju menjadi

$$\frac{\mathbf{N}(t_{n+1}) - \mathbf{N}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{N}(t_n)}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{N}(t_n), t_n) \times \mathbf{N}(t_n) \tag{9.30}$$

menghasilkan

$$\mathbf{N}(t_{n+1}) = \mathbf{N}(t_n) + \Delta t \times \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_n) = \mathbf{N}(t_n) + \Delta t \times \mathbf{A}(\mathbf{N}(t_n), t_n) \times \mathbf{N}(t_n) \tag{9.31}$$

sementara penerapan skema implisit atau pendekatan Euler mundur terhadap Pers. (9.29) menjadi

$$\frac{\mathbf{N}(t_{n+1}) - \mathbf{N}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{N}(t_{n+1})}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{N}(t_{n+}), t_{n+1}) \times \mathbf{N}(t_{n+1}) \tag{9.32}$$

menghasilkan

$$\mathbf{N}(t_{n+1}) = \mathbf{N}(t_n) + \Delta t \times \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_{n+1}) = \mathbf{N}(t_n) + \Delta t \times \mathbf{A}(\mathbf{N}(t_{n+1}), t_{n+1}) \times \mathbf{N}(t_{n+1}) \tag{9.33}$$

Pada persamaan-persamaan tersebut, Δt menyatakan *timestep* yang digunakan untuk melakukan pengintegralan numerik terhadap Pers. (9.29) dan t_n menyatakan waktu diskret di mana konsentrasi spesies-

spesies yang berbeda akan dievaluasi. Skema eksplisit bersifat akurat dalam orde satu, karena dari ekspansi Taylor orde untuk $\mathbf{N}(t_n)$ kita dapatkan

$$\frac{\mathbf{N}(t_{n+1} - \mathbf{N}(t_n))}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t) \tag{9.34}$$

Demikian pula untuk skema implisit juga bersifat akurat orde satu, karena dari ekspansi Taylor orde satu untuk $\mathbf{N}(t_{n+1})$ kita dapatkan

$$\frac{\mathbf{N}(t_{n+1} - \mathbf{N}(t_n))}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t) \tag{9.35}$$

Akurasi yang lebih bagus dapat diperoleh dengan menjumlahkan Pers. (9.31) dan (9.33). Akan diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t_{n+1}) &= \mathbf{N}(t_n) + \frac{\Delta}{2} \times \left[\frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_n) + \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_{n+1})\right] \\ &= \mathbf{N}(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \times [\mathbf{A}(\mathbf{N}(t_n), t_n) \times \mathbf{N}(t_n) + \mathbf{A}(\mathbf{N}(t_{n+1}), t_{n+1}) \times \mathbf{N}(t_{n+1})] \end{aligned} \tag{9.36}$$

Dengan membandingkan pernyataan ini dengan integrasi langsung terhadap Pers. (9.29) pada kasus kontinyu, di mana dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{N}(t_{n+1}) = \mathbf{N}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{A}(\mathbf{N}(t), t) \times \mathbf{N}(t)\, dt \tag{9.37}$$

dapat dilihat bahwa Pers. (9.37) menggunakan metode trapesium sebagai pendekatan terhadap integral di Pers. (9.37). Pers. (9.37) dikenal dengan skema **Crank-Nicholson**.

Menuliskan kembali Pers. (9.29) sebagai

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}(t) = f(t) \tag{9.38}$$

ekspansi Taylor orde dua untuk $\mathbf{N}(t_n)$ adalah

$$\mathbf{N}(t_{n+1}) = \mathbf{N}(t_n) + \Delta t \times \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \times \frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \tag{9.39}$$

sementara untuk $f(t_n)$ digunakan ekspansi Taylor orde satu:

$$f(t_{n+1}) = f_i(t_n) + \Delta t \times \frac{df}{dt}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{9.40}$$

Skema Crank-Nicholson menjadi ekivalen dengan menuliskan Pers. (9.29) sebagai

$$\frac{\mathbf{N}(t_{n+1}) - \mathbf{N}(t_n)}{\Delta t} = \frac{f(t_{n+1}) + f(t_n)}{2} \tag{9.41}$$

Suku sebelah kiri dari Pers. (9.41) dapat dievaluasi dari Pers. (9.39) sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{N}(t_{n+1}) - \mathbf{N}(t_n)}{\Delta t} &= \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \times \frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= f(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \times \frac{df}{dt}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \tag{9.42}$$

di mana kesamaan yang kedua diperoleh menggunakan Pers. (9.38).

Dengan cara yang serupa, suku sebelah kanan dari Pers. (9.41) dapat dievaluasi dari Pers. (9.40) sebagai

$$\frac{f(t_{n+1} + f(t_n))}{2} = f(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \times \frac{df}{dt}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{9.43}$$

Dengan membandingkan Pers. (9.42) dengan (9.43), dapat kita lihat bahwa skema Crank-Nicholson yang didefinisikan oleh Pers. (9.41) adalah akurat orde dua.

Untuk mempelajari stabilitas dari metode eksplisit, implisit dan Crank-Nicholson, kita gunakan persamaan diferensial orde satu sebagai berikut

$$\frac{dn}{dt}(t) = a \times n(t) \tag{9.44}$$

dengan a adalah konstanta. Persamaan ini bentuknya sebanding dengan Pers. (9.29) yang merupakan persamaan yang mendeskripsikan pengaruh dari deplesi bahan bakar. Penerapan skema yang berbeda akan menghasilkan:

- untuk skema eksplisit

$$n(t_{n+1}) = (1 + a\Delta t)n(t_n) = (1 + a\Delta t)^2 n(t_{n-1}) = \ldots = (1 + a\Delta t)^{n+1} n(t_0) \tag{9.45}$$

- untuk skema implisit

$$n(t_{n+1}) = (1 - a\Delta t)^{-1} n(t_n) = (1 - a\Delta t)^{-2} n(t_{n-1}) = \ldots = (1 + a\Delta t)^{-(n+1)} n(t_0) \tag{9.46}$$

- untuk skema Crank-Nicholson

$$n(t_{n+1}) = \left(\frac{1 + a\Delta t}{1 - a\Delta t}\right) n(t_n) = \left(\frac{1 + a\Delta t}{1 - a\Delta t}\right)^2 n(t_{n-1}) = \ldots = \left(\frac{1 + a\Delta t}{1 - a\Delta t}\right)^{n+1} n(t_0) \tag{9.47}$$

Dapat dilihat bahwa jika a adalah bilangan negatif, akan didapatkan

$$\Delta t < \frac{2}{|a|} \tag{9.48}$$

agar didapatkan konvergensi pada skema eksplisit. Kondisi semacam ini sulit dipenuhi pada prakteknya untuk perhitungan deplesi. Sebaliknya, metode implisit dan Crank-Nicholson selalu stabil untuk nilai-nilai a yang negatif.

Persamaan-persamaan (9.34), (9.35), (9.41)-(9.43) juga menunjukkan bahwa galat pemotongan menuju ke nol ketika time step mendekati nol. Berdasarkan teorema ekivalensi Lax yang menyatakan bahwa

untuk skema numerik yang *well-posed* dan konsisten maka stabilitas dan konvergensinya ekivalen, dapat disimpulkan dari analisis di tas bahwa skema implisit dan Crank-Nicholson selalu konvergen dan skema eksplisit akan konvergen jika Pers. (9.48) terpenuhi.

Karena metode Crank-Nicholson adalah akurat orde dua dan stabil tanpa syarat, skema tersebut digunakan dalam perhitungan deplesi. Meskipun demikian, skema tersebut adalah implisit sehingga membuat rumit penerapannya dalam perhitungan deplesi. Oleh karena itu digunakan metode lain, yang disebut dengan metode ***predictor-corrector***, yang didasarkan pada metode Crank-Nicholson. Pada metode *predictor-corrector*, pertama-tama digunakan metode maju Euler (9.31) untuk kemudian menentukan pendekatan konsentrasi $\mathbf{N}(t_{n+1})$ di suku sebelah kanan dari Pers. (9.37). Langkah pertama ini disebut dengan langkah prediktor di mana akan diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^P(t_{n+1}) &= \mathbf{N}(t_n) + \Delta t \times \frac{d\mathbf{N}}{dt}(t_n) \\ &= \mathbf{N}(t_n) + \Delta t \times \mathbf{A}[\mathbf{N}(t_n), t_n] \times \mathbf{N}(t_n) \\ &= (\mathbf{I} + \Delta t \times \mathbf{A}[\mathbf{N}(t_n), t_n]) \times \mathbf{N}(t_n) \end{aligned} \quad (9.49)$$

Langkah kedua adalah langkah korektor di mana akan diperoleh

$$\mathbf{N}^C(t_{n+1}) = \mathbf{N}(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \times \big(\mathbf{A}[\mathbf{N}(t_n), t_n] \times \mathbf{N}(t_n) + \mathbf{A}[\mathbf{N}^P(t_{n+1}), t_{n+1}] \times \mathbf{N}(t_{n+1})\big) \quad (9.50)$$

Penerapan metode predictor-corrector dengan demikian memerlukan perhitungan fluks neutron baik di awal setiap timestep maupun di akhir setiap timestep, karena matriks **A** tergantung kepada fluks neutron, yang dia sendiri juga fungsi dari konsentrasi berbagai spesies. Dapat dilihat darii Pers. (9.49) dan (9.50) bahwa metode predictor-corrector adalah metode eksplisit.

9.4. Ukuran dari burnup bahan bakar

Ukuran yang paling umum digunakan untuk burnup bahan bakar adalah pelepasan energi fisi per satuan massa bahan bakar. Secara sederhana, burnup dapat dihitung sebagai berikut:

$$B = \frac{Q_f}{\rho_F} \int_0^\tau \phi(t)\Sigma_f(t)dt = \frac{Q_f}{\rho_F} \overline{\phi \cdot \Sigma_f}\, \tau \quad (9.51)$$

dengan B adalah burnup, ρ_F adalah densitas bahan bakar, Q_f adalah energi fisi rerata (200 MeV) dan τ adalah waktu pembakaran bahan bakar.

Pelepasan energi fisi dalam megawatt-days dibagi dengan massa total (dalam satuan 1000 kg atau ton) inti bahan bakar (fisil plus fertil) pada pengisian awal dinyatakan dengan *megawatt-days per tonne* (`MWd/T`). Kadang dituliskan pula sebagai `MWD/MTU` (*megawatt-days per metric tonne uranium*).

Burnup juga dapat dinyatakan dengan satuan lain yaitu `% FIMA` atau *fission in initial metalic atoms*. Hubungan antara FIMA dengan B dinyatakan sebagai berikut:

$$FIMA = \frac{\phi \Sigma_f \tau}{N_F} = \frac{\phi \Sigma_f \tau M_{r,F}}{\rho N_{AV}} = \frac{B M_{r,F}}{Q_f N_{AV}} \tag{9.52}$$

1% FIMA nilainya sekitar 9600 MWD/T. (Rule of thumb: 1% FIMA $\approx$ 10 GWD/T).

Satuan lain yang biasa digunakan adalah FIFA atau *Fission per Initial Fissionable Atoms*. Hubungan antara FIFA dan FIMA dinyatakan sebagai berikut:

$$FIFA = FIMA \frac{N_F}{N_{fisil}} = FIMA \frac{1}{e_0/100} \tag{9.53}$$

dengan e_0 adalah pengkayaan awal dalam %.

Contoh, reaktor dengan muatan awal bahan bakar sebesar 100 ribu kg beroperasi dengan daya 3000 MWt selama 1000 hari akan memiliki burnup sebesar 30000 MWD/T atau 30 GWD/T atau sekitar 3,125% FIMA. Jika pengkayaan awal bahan bakar sebesar 4%, maka burnupnya sebesar 78,125% FIFA.

Untuk LWR, burnup tipikal bahan bakar adalah antara 30 sampai 50 GWD/T, dan untuk reaktor cepat perkiraannya adalah sekitar 100 sampai 150 GWD/T.

Hal yang penting dalam operasi reaktor adalah kebutuhan bahan bakar tahunan. Berdasarkan energi termal tahunan yang dihasilkan dari sebuah reaktor

$$E_{th} = \int_0^{1\text{ tahun}} P_{th}\, dt = P_{th}\, T = \frac{P_{el}\, T}{\eta/100} \tag{9.54}$$

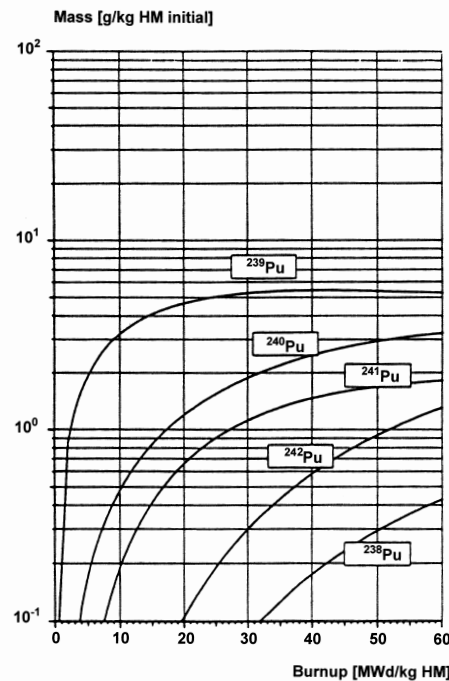
besarnya pengisian bahan bakar per tahun adalah sebesar

$$\dot{m}_F = \frac{E_{th}}{B} = \frac{P_{el}\, T}{\eta/100} \frac{1}{B} \tag{9.55}$$

dengan η adalah efisiensi dari pembangkit [%], T adalah jam operasi beban penuh per tahun [jam/tahun], P_{el} adalah daya listrik [MW] dan $\dot{m}_F$ adalah kuantitas pengisian ulang logam berat [ton/tahun].

Sebagai contoh, PLTN dengan daya listrik sebesar 1300 MW dengan efisiensi sebesar 33% dan beroperasi selama 6500 jam per tahun dengan burnup sebesar 35000 MWd/t akan membutuhkan pengisian ulang bahan bakar sebesar 30,4 ton per tahun.

9.5. Perubahan komposisi bahan bakar seiring burnup

Isotop dapat belah seperti U-235 akan berkurang selama reaktor beroperasi. Akan tetapi transmutasi isotop fertil seperti U-238 akan menghasilkan isotop dapat belah Pu-239 yang akan mengalami transmutasi oleh tangkapan neutron menjadi Pu-240 dan isotop-isotop aktinida yang lain. Pembentukan isotop-isotop Pu sebagai fungsi burnup bahan bakar untuk PWR ditampilkan pada Gambar 9.4.

Gambar 9.4. *Pembentukan isotop Pu pada LWR dengan bahan bakar UO_2 berpengkayaan 4%.*

9.5.1. Pengaruh perubahan komposisi bahan bakar terhadap reaktivitas

Pembelahan inti bahan bakar menghasilkan pengaruh reaktivitas **negatif**, yaitu:

1. berkurangnya jumlah inti bahan bakar
2. dihasilkannya produk fisi yang banyak di antaranya mempunyai tampang lintang tangkapan neutron yang tinggi.

Rantai transmutasi-peluruhan dari inti bahan bakar fertil akan menghasilkan urutan isotop aktinida (untuk reaktor berbahan bakar uranium) atau uranium (untuk reaktor berbahan bakar thorium) dan beberapa di antaranya merupakan bahan fisil.

- Transmutasi satu isotop fertil menjadi isotop non-fisil yang lain dapat memberikan efek reaktivitas **positif atau negatif** tergantung dari tampang lintang isotop fisil yang bersangkutan.
- Transmutasi isotop fertil menjadi isotop fisil akan memberikan efek reaktivitas **positif**.

Tergantung dari tingkat pengkayaan awal, proses transmutasi-peluruhan pada umumnya akan menghasilkan lebih banyak isotop fisil daripada yang dikonsumsi pada awal siklus yang akan menyebabkan pengaruh reaktivitas positif, sampai konsentrasi inti fisil hasil transmutasi mengalami kondisi setimbang.

Pembentukan Pu-239 di awal masa hidup reaktor berbahan bakar uranium akan menghasilkan sejumlah besar reaktivitas positif yang mungkin lebih besar daripada pengaruh reaktivitas negatif dari deplesi U-235 dan pembentukan produk fisi. Untuk reaktor termal, $\eta^{49} < \eta^{25}$, sehingga pembentukan Pu-239 harus melebihi burnup U-235 agar diperoleh reaktivitas positif. Untuk reaktor cepat, $\eta^{49} > \eta^{25}$ untuk energi

neutron lebih dari 10 keV dan mungkin akan ada reaktivitas positif awal jika pengurangan U-235 lebih besar daripada pembentukan Pu-239. Akan tetapi konsentrasi Pu-239 akan jenuh pada satu nilai yang ditentukan oleh kesetimbangan antara laju transmutasi U-238 dan laju deplesi Pu-239, di mana pada nilai tersebut deplesi U-235 dan pembentukan produk fisi akan menghasilkan reaktivitas negatif.

9.5.2. Kompensasi reaktivitas terhadap deplesi bahan bakar

Pengaruh deplesi bahan bakar terhadap reaktivitas harus dikompensasi untuk menjaga kritikalitas sepanjang siklus burnup bahan bakar. Beberapa cara untuk melakukan kompensasi reaktivitas adalah dengan menggunakan sistem sebagai berikut

Control rods

Material *control rods* dimasukkan ke teras untuk mengkompensasi reaktivitas deplesi positif dan ditarik dari teras untuk mengkompensasi reaktivitas deplesi negatif.

Soluble poisons

Soluble poisons merupakan bahan penyerap neutron yang dilarutkan ke dalam pendingin reaktor dan diatur konsentrasinya untuk mengkompensasi perubahan reaktivitas pada reaktor. *Soluble poisons* digunakan untuk mengkompensasi reaktivitas deplesi bahan bakar di PWR, tapi tidak di BWR (adanya kemungkinan terakumulasi di permukaan pendidihan). Akan tetapi *soluble poisons* dapat menyebabkan koefisien reaktivitas suhu pendingin yang positif karena kenaikan suhu akan mengurangi densitas penyerap neutron. Dengan demikian konsentrasi maksimum (dan juga jumlah reaktivitas deplesi bahan bakar yang dapat dikompensasi) harus dibatasi.

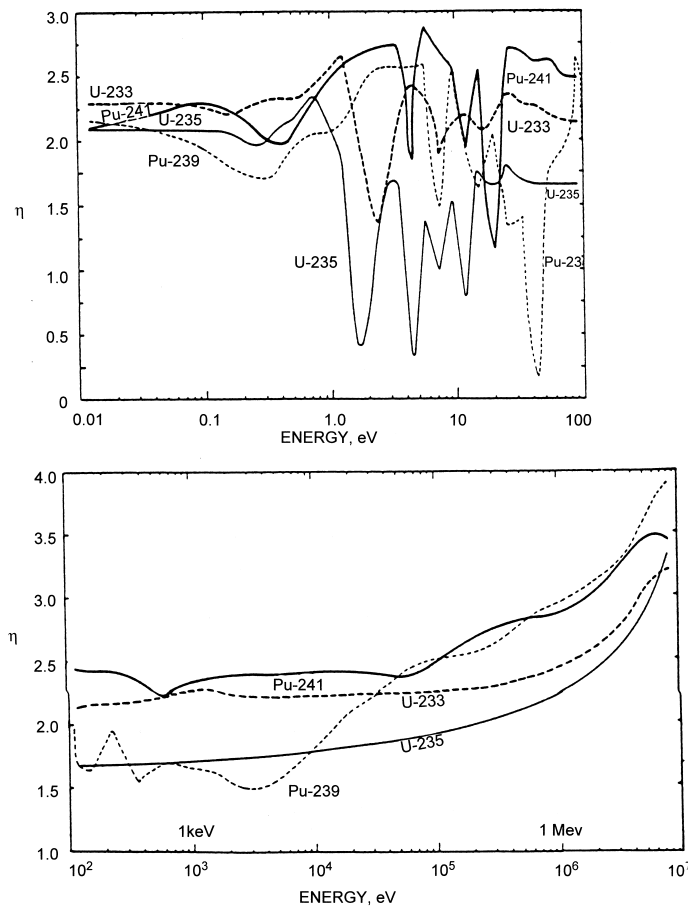
Burnable poisons

Contoh dari material untuk *burnable poisons* (BP) atau racun dapat bakar adalah boron, erbium, gadolinium yang diletakkan di kisi bahan bakar. BP dapat terdeplesi seiring waktu dan dapat digunakan untuk mengkompensasi reaktivitas positif deplesi bahan bakar.

Konsentrasi BP dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dn^{bp}}{dt} = -f_{bp} n^{bp} \sigma_{bp} \phi \tag{9.56}$$

dengan f_{bp} adalah *self-shielding* dari elemen racun (yaitu rasio antara fluks neutron di elemen racun terhadap fluks neutron di perangkat bahan bakar sebelahnya).

Konsentrasi racun dipilih sedemikian rupa sehingga *self-shielding* elemen racun cukup besar ($f_{bp} \ll 1$) di awal siklus burn-up untuk menahan racun dari serapan neutron dan laju serapan neutron tetap konstan seiring waktu. Setelah waktu tertentu, konsentrasi bahan racun berkurang secukupnya sehingga f_{bp} meningkat dan racun terbakar yang akan menghasilkan naiknya reaktivitas. Jika racun mulai terbakar pada saat yang sama dengan efek reaktivitas deplesi bahan bakar secara keseluruhan mulai menjadi lebih

Gambar 9.5. *Parameter η untuk beberapa material fisil.*

negatif (yaitu ketika konsentrasi Pu-239 jenuh), pembakaran racun akan mengkompensasi (paling tidak secara parsial) penurunan reaktivitas deplesi bahan bakar.

Penjelasan lebih lanjut mengenai pengendalian reaktivitas ini akan dibahas pada Bab 10.

9.6. Konversi dan Pembiakan

9.6.1. Ketersediaan neutron

Laju transmutasi isotop fertil menjadi fisil tergantung dari banyaknya kelebihan neutron dari yang diperlukan untuk mempertahankan reaksi fisi berantai. Tanpa adanya serapan neutron oleh material selain bahan bakar dan tanpa adanya bocoran, banyaknya kelebihan neutron adalah $\eta - 1$. Gambar 9.5 menampilkan nilai η untuk beberapa material fisil yang penting.

Karakteristik konversi fertil ke fisil ditentukan oleh siklus bahan bakar dan spektrum energi neutron.

- untuk spektrum neutron termal ($E < 1$ eV), U-233 mempunyai nilai η yang paling tinggi. Dengan demikian untuk reaktor termal paling baik digunakan siklus bahan bakar Th^{232}–U^{233}.

- untuk spektrum neutron cepat ($E > 5 \times 10^4$ eV), Pu-239 dan Pu-241 mempunyai nilai η yang terbesar. reaktor-reaktor cepat berdasar pada siklus bahan bakar U^{238}-Pu^{239} dimaksudkan untuk memanfaatkan kenaikan η^{49} pada energi tinggi.

9.6.2. Rasio konversi

`Rasio konversi seketika (`*`instantaneous conversion ratio`*`)` didefinisikan sebagai rasio antara laju pembentukan isotop fisil baru dengan laju destruksi isotop fisil. Jika laju ini bernilai lebih dari satu, maka nilai rasionya disebut dengan `Rasio pembiakan (`*`breeding ratio`*`)`. Tabel 9.4 menunjukkan besarnya rasio konversi atau pembiakan pada beberapa sistem reaktor.

Tabel 9.4. *Rasio konversi/pembiakan pada sistem reaktor yang berbeda.*

Sistem reaktor	Bahan bakar awal	Siklus konversi	Rasio konversi
BWR	2-4 wt % U^{235}	U^{238}–Pu^{239}	0,6
PWR	2-4 wt % U^{235}	U^{238}–Pu^{239}	0,6
PHWR	U alam	U^{238}–Pu^{239}	0,8
HTGR	$\approx$ 5 wt % U^{235}	Th^{232}–U^{233}	0,8
LMFBR	10 - 20 wt % Pu	U^{238}–Pu^{239}	1,0 - 1,6

Dari Tabel 9.4 tampak bahwa rasio konversi untuk PWR dan BWR sama besar dikarenakan desain yang serupa. Rasio konversi untuk HTGR meng gunakan siklus thorium sedikit lebih tinggi karena nilai η U-233 yang lebih tinggi daripada U-235. Sementara itu untuk CANDU-PHWR nilai rasio konversinya juga sedikit lebih tinggi karena ekonomi neutron yang lebih baik dikarenakan proses pengisian ulang secara *online* dan sedikitnya kebutuhan akan batang penyerap. Pada LMFBR nilai rasio pembiakan dapat bervariasi tergantung dari spektrum energi neutron. Tampak bahwa untuk mendapatkan nilai η yang tinggi sehingga nilai rasio pembiakan juga tinggi diperlukan spektrum neutron yang keras (energi tinggi). Akan tetapi untuk alasan keselamatan, spektrum yang lebih lunak (energi lebih re ndah) lebih disukai. Meskipun demikian semakin rendah energi neutron, kemungkinan terjadinya tangkapan radiatif ($n - \gamma$) lebih besar daripada untuk menghasilkan fisi.

Misalkan kita mengkonsumsi N atom fisil pada satu siklus operasi reaktor. Jika rasio konversi dapat dinyatakan dengan C, maka kita memproduksi $N \times C$ atom fisil baru. Jika atom-atom ini dikonsumsi pada siklus yang sama atau pada siklus selanjutnya, konsumsi tersebut akan menghasilkan produksi $N \times C^2$ atom fisil baru. Konsumsi material fisil keseluruhan, termasuk juga N atom fisil awal yang dikonsumsi pada siklus pertama adalah

$$A = N + N \times C + N \times C^2 + \ldots = \frac{N}{1 - C} \tag{9.57}$$

Tampak bahwa kita telah menambah secara efektif pasokan material fisil dengan faktor $(1 - C)^{-1}$.

Berapa besarnya uranium yang ditambang dapat digunakan pada sebuah LWR? Kita harus memperhitungkan juga bahwa pada kenyataannya sebagian dari U-235 yang ditambang berakhir menjadi limbah atau aliran *tail* pada pabrik pemisahan isotop. Untuk pabrik pemisahan secara difusi gas atau sentrifugal,

rasio antara U-235 pada produk yang telah diperkaya dengan U-235 yang dijadikan umpan pada pabrik pemisahan dapat dinyatakan dengan

$$\frac{\text{Massa U-235 dalam produk}}{\text{Massa U-235 dalam umpan}} = \frac{x_p\,(x_F - x_W)}{x_F\,(x_P - x_W)} \tag{9.58}$$

dengan x_F, x_P dan x_W masing-masing adalah fraksi massa fisil untuk material umpan, produk dan *tail* pada pabrik pemisahan. Rasio antara material yang digunakan untuk menghasilkan energi terhadap total material bahan bakar yang ditambang dapat diperkirakan sebagai berikut

$$U_e = x_P \frac{x_F - x_W}{x_P - x_W} \frac{1}{1 - C} \tag{9.59}$$

Pengkayaan *tail*, x_W, terkait dengan kerja pemisahan (*separative work*) yang diperlukan dalam proses pemisahan isotop. Pengkayaan *tail* yang lebih rendah, yang manghasilkan penggunaan bahan bakar yang lebih baik, memerlukan sejumlah besar proses pemisahan.

Untuk LWR dengan pengkayaan produk U-235 sebesar 3 w%, rasio konversi sebesar 0,6 dan pengkayaan *tail* sebesar 0,25 w%, Pers. (9.59) menghasilkan nilai penggunaan bahan bakar hanya sebesar 0,013. Untuk rasio konversi dalam rentang antara 0,5 dan 0,8, bahan bakar yang ditambang yang dapat dimanfaatkan lebih kecil dari 3%. Jika nilai C melebih 0,95, maka 10% dari bahan bakar tersebut yang digunakan. Meskipun rasio konversi yang mendekati satu mungkin dapat diperoleh pada reaktor termal, nilai tersebut dapat dicapai dengan cara menggunakan inventori bahan bakar yang tinggi, daya spesifik yang rendah dan pemrosesan ulang yang sering untuk meminimalisasi pembentukan produk fisi.

Pers. (9.59) akan mendekati tak hingga jika nilai C mendekati satu, yang artinya kita mengkonversi atom fertil sebanyak kita mengkonsumsi atom fisil. Ketika C mendekati dan melebihi satu, kita harus memperhitungkan pasokan relatif atom fertil terhadap atom fisil yang diasumsikan lebih besar daripada $(1 - C)^{-1}$ pada Pers. (9.58). Reaktor dengan nilai C lebih besar daripada satu disebut dengan reaktor pembiak. Pada reaktor pembiak, semua bahan bakar yang memasuki siklus bahan bakar akan mengalami fisi untuk menghasilkan energi, hilang padaa proses pengolahan ulang atau fabrikasi ulang, atau mengalami transmutasi menjadi isotop-isotop yang tidak membelah. Jika kita mendefinisikan F_b sebagai fraksi atom bahan bakar (fisil dan fertil) yang diumpankan ke dalam reaktor yang mengalami fisi selama waktu bahan bakar berada di dalam reaktor dan L adalah fraksi hilang selama pengolahan ulang dan fabrikasi ulang bahan bakar, maka penggunaan bahan bakar untuk reaktor pembiak dapat dinyatakan dengan

$$U_e = \frac{F_b}{F_b + L} \tag{9.60}$$

9.6.3. Rasio pembiakan

Sebuah reaktor pembiak harus mempunyai rasio konversi lebih besar dari satu, yang mana dalam hal ini rasio konversi juga disebut dengan *rasio pembiakan*. Besarnya nilai di mana rasio konversi melebihi angka satu disebut dengan *keuntungan pembiakan* atau *breeding gain*. Untuk membandingkan efisiensi relatif di antara isotop-isotop bahan bakar yang berbeda, perlu disusun hubungan antara rasio pembiakan dengan karakteristik nuklir material fisil dan fertil. Misal sebuah reaktor terdiri dari hanya dua isotop

bahan bakar yaitu satu fisil dan satu fertil. Persamaan neraca neutron untuk reaktor kritis adalah sebagai berikut

$$\nu_1 F_1 + \nu_2 F_2 = (1 + \alpha_1) F_1 + F_2 + C_2 + A \tag{9.61}$$

dengan

F_1	=	$\Sigma_{f1}\phi$ = laju fisi pada isotop fisil
F_2	=	$\Sigma_{f2}\phi$ = laju fisi pada isotop fertil
ν_i	=	neutron yang dihasilkan per fisi pada isotop i
α_1	=	rasio *capture-to-fission* pada isotop fisil
C_2	=	$\Sigma_{c2}\phi$ = laju tangkapan pada isotop fertil
A	=	laju bocor dan serapan parasitik

Rasio pembiakan adalah rasio tangkapan pada material fertil terhadap hilangnya material fisil dan dapat dinyatakan dengan laju reaksi dia atas sebagai berikut

$$BR = \frac{C_2}{(1 + \alpha_1) F_1} \tag{9.62}$$

Dengan mensubstitusi nilai C_2 dari Pers. (9.61) ke Pers. (9.62) diperoleh

$$BR = (\eta_1 - 1) + \frac{(\nu_2 - 1)}{(1 + \alpha_1)} \frac{F_2}{F_1} - \frac{A}{(1 + \alpha_1) F_1} \tag{9.63}$$

Suku pertama pada relasi rasio pembiakan menyatakan neutron yang "tersisa" setelah berlangsung serapan neutron fisil dari generasi sebelumnya. Suku kedua menyatakan fisi cepat "bonus" pada material fertil, yaitu beberapa neutron dari fisi pada material fiertil yang tersedia untuk konversi fertil ke fisil pada material fertil yang lain. Suku ketiga menyatakan hilangnya neutron akibat tangkapan pada struktur, pendingin, material kontrol dan produk fisi serta bocoran neutron. Bocoran neutron biasanya dapat diminimalisasi dengan menutupi sekeliling reaktor dengan "selimut (*blanket*)" fertil untuk memanfaatkan neutron fisi sebanyak mungkin. Meskipun Pers. (9.63) cukup sederhana, akan tetapi untuk mengevaluasi setiap suku-sukunya cukup kompleks karena berbagai asio laju reaksi cukup sensitif terhadap spektrum neutron dan spektrum neutron tidak uniform secara spasial.

Agar dapat membandingkan nilai relatif berbagai kombinasi fisil-fertil, Tabel 9.5 menunjukkan beberapa data nuklir untuk rantai pembentukan isotop yang dimulai dengan isotop ferti U-238 dan Th-232. Meskipun reaktor cepat dapat memanfaatkan U-235 pada pemuatan fisil awal, campuran isotop plutonium akan memberikan performa pembiakan yang lebih baik daripada U-235, tidak seperti perilaku relatifnya pada spektrum neutron termal. Data pada Tabel 9.5 juga menunjukkan bahwa rantai pembentukan aktinida yang dimulai dengan U-238 lebih disukai daripada rantai thorium. Meskipun U-233 tampaknya juga mempunyai potensi pembiakan yang lebih baik daripada U-235 pada spektrum cepat, ia tidak sebagus campuran Pu-239 dan Pu-241. Faktor penting lainnya adalah performa relatif isotop-isotop fertil. Baik U-238 maupun Pu-240 mempunyai tampang lintang fisi cepat yang lebih tinggi daripada Th-232 pada spektrum reaktor cepat sehingga suku kedua pada Pers. (9.63) akan lebih besar untuk rantai aktinida. Karakteristik gabungan U-238 dan isotop-isotop plutonium menyebabkan rantai aktinida lebih unggul daripada rantai Th-U^{233} pada spektrum neutron reaktor cepat.

Tabel 9.5. *Parameter fisi nuklir pada spektrum reaktor cepat*

	ν	η	$\bar{\sigma}_f$	$\bar{\sigma}_a$
U-233	2,6	2,4	2,52	2,75
U-235	2,5	2,0	1,95	2,49
Pu-239	3,0	2,4	1,83	2,30
Pu-241	3,0	2,6	2,45	2,86
Th-232	2,4	–	0,01	0,31
U-238	2,6	–	0,04	0,33
Pu-240	2,9	–	0,37	0,76

9.6.4. *Doubling time*

Agar rasio pembiakan yang tinggi dapat dimanfaatkan dengan baik, produksi tambahan material fisil harus berlangsung dalam waktu yang relatif singkat. Karakteristik performa yang mendefinisikan kemampuan tersebut adalah *doubling time*, yaitu waktu operasi normal yang diperlukan agar inventori fisl menjadi dua kali lipat.

Laju produksi fisil, R, pada reaktor pembiak cepat adalah

$$\begin{aligned} R &= \text{gram material fisil yang dihasilkan per tahun} \\ &= 365 \frac{fP}{g} \frac{(BR-1)(1+\alpha_1)}{1+F} \end{aligned} \tag{9.64}$$

dengan

g	=	energi per fisi (MWD/gram yang mengalami fisi)
f	=	faktor kapasitas pembangkit
P	=	tingkat daya pembangkit (MW)
BR	=	rasio pembiakan reaktor
α_1	=	rasio tangkapan material fisil terhadap pembelahan
F	=	Fisi fertil/fisi fisil

Inventori fisil terdiri dari material pada reaktor dan material pada aliran proses *head end* dan *tail end* untuk reaktor. Jika inventori ini adalah sebesar I, *doubling time* dalam tahun untuk reaktor dengan laju produksi material fisil sebesar R adalah

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{I}{R} \\ &= \frac{10^6\, g\, I}{365\, f\, P} \frac{1+F}{(BR-1)(1+\alpha_1)} \end{aligned} \tag{9.65}$$

Besaran ini biasa disebut dengan *doubling time sederhana*, τ_s, karena bahan bakar yang dibiakkan dianggap tidak berubah, yaitu waktu yang dibutuhkan untuk inventori I menjadi dua kalinya ($2I$) dinyatakan dengan

$$I + R\tau_s = 2I \tag{9.66}$$

Jika bahan bakar yang dibiakkan diambil setiap tahunnya untuk ditambahkan pada inventori reaktor pembiak lain yang mempunyai karakteristik yang identik, maka

$$\left(1 + \frac{R}{I}\right)^{\tau} = 2 \tag{9.67}$$

Ini mirip dengan bunga bank tahunan (jika satuan τ dalam tahun), jadi

$$\tau_c = \frac{\ln 2}{\ln\left[1 + \left(\frac{R}{I}\right)\right]} = \frac{0,693}{\ln\left[1 + \left(\frac{1}{\tau_s}\right)\right]} \tag{9.68}$$

Jika penambahan berlangsung kontinya, maka

$$\tau_{cc} = 0,693\tau_s = 0,693\left(\frac{I}{R}\right) \tag{9.69}$$

Agar diperoleh *doubling time* yang singkat, suatu reaktor capat harus mempunyai rasio pembiakan yang tinggi dan daya spesifik fisil yang tinggi, P_{FS}, di mana

$$P_{FS} = \frac{\text{tingkat daya reaktor}}{\text{inventori fisil total}} \tag{9.70}$$

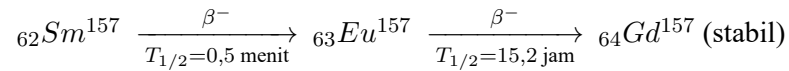
Besaran ini berkaitan dengan daya spesifik reaktor, P_s (kW/kg logam berat) sebagai berikut

$$P_{FS} = \frac{P_s}{\epsilon}\frac{I_{\text{core}}}{I_{\text{total}}} \tag{9.71}$$

dengan ϵ adalah gram material fisil di bahan bakar/total logam berat di bahan bakar.

LATIHAN

1. Samarium-157 dihasilkan dengan laju produksi sebesar 7×10^5 atom/fisi dan kemudian mengalami peluruhan seperti pada skema berikut ini:

$$_{62}Sm^{157} \xrightarrow[T_{1/2}=0{,}5 \text{ menit}]{\beta^-} {}_{63}Eu^{157} \xrightarrow[T_{1/2}=15{,}2 \text{ jam}]{\beta^-} {}_{64}Gd^{157} \text{ (stabil)}$$

   Meskipun tampang lintang serapan samarium dan europium dapat diabaikan, akan tetapi tampang lintang serapan termal gadolinium sebesar 240.000 b. Anggap sebuah reaktor beroperasi dengan densitas daya sebesar 100 MW/m^3 dan fluks neutron sebesar 8×10^{12} n/cm^2/s. Anggap pula energi yang dihasilkan per fisi sebesar $3,1 \times 10^{-11}$ W-s.

   (a) Selesaikan persamaan peluruhan untuk densitas atom gadolinium, $G(t)$, pada waktu t setelah reaktor startup.

   (b) Tentukan densitas atom gadolinium pada kondisi setimbang, $G(\infty)$

   (c) Jika reaktor dioperasikan selama beberapa minggu dan kemudian dipadamkan (*shutdown*), berapa konsentrasi gadolinium setelah reaktor padam selama beberapa minggu?

2. Sebuah reaktor termal menggunakan bakar uranium dengan pengkayaan awal 4%.

   (a) Berapa nilai CR pada BOL ?

   (b) Setelah separo dari ^{235}U terbakar, berapa besarnya CR ?

   (c) Setelah separo dari ^{235}U terbakar, berapa persen daya yang dihasilkan dari ^{239}Pu ?

3. Sebuah reaktor termal menggunakan bahan bakar campuran ^{235}U dan ^{232}Th dengan rasio 1:20. Reaktor tersebut dioperasikan selama 1 tahun dengan fluks neutron konstan sebesar 8×10^{13} n/cm^2-s.

   Hitunglah konsentrasi ^{233}U dan ^{235}U di akhir tahun, relatif terhadap konsentrasi awal ^{235}U. Berapa besarnya CR tahunan?

Bab 10

Pengaturan Reaktivitas

A fact is a simple statement that everyone believes. It is innocent, unless found guilty. A hypothesis is a novel suggestion that no one wants to believe. It is guilty, until found effective.

EDWARD TELLER

Learning outcomes :

- Mampu mengidentikasi perilaku dinamis reaktor.
- Mampu menjelaskan pengaruh deplesi dan konversi bahan bakar serta peracunan produk fisi terhadap reaktivitas reaktor.

Minggu ke : 13

PENGATURAN reaktivitas merupakan bagian yang integral dalam manajemen bahan bakar nuklir. Perangkat bahan bakar yang dimuatkan ke dalam reaktor di awal siklus harus mempunyai reaktivitas lebih (*excess reactivity*) yang cukup untuk mengkompensasi deplesi bahan bakar, pembentukan racun produk fisi dan penurunan reaktivitas akibat perubahan suhu bahan bakar, moderator dan penyusun reaktor yang lain. Karena distribusi neutron di dalam reaktor dan besarnya reaktivitas lebih yang diatur akan berubah dari satu siklus ke siklus berikutnya, teknik-teknik yang digunakan untuk mengatur reaktivitas lebih ini harus dipertimbangkan dan disesuaikan agar tercapai tujuan operasi setiap siklusnya.

10.1. Kebutuhan akan pengaturan reaktivitas

Kebutuhan pengaturan total pada sebuah reaktor nuklir diperoleh dari sejumlah komponen-komponen individu. Setiap komponen kendali dicirikan oleh

1. nilai *reactivity worth*
2. skala waktu perubahan reaktivitas yang terjadi

Ada tiga jenis komponen kendali, yaitu

1. *scram control*:
   sistem kendali yang harus dapat membuat reaktor menjadi subkritis secara cepat pada semua kondisi operasi, termasuk ketika terjadi kecelakaan reaktivitas.
2. *power regulation*:
   sistem kendali yang digunakan untuk mengkompensasi transien reaktivitas kecil yang disebabkan oleh perubahan beban, suhu dan racun produk fisi setimbang selama operasi normal.
3. *shim control*:
   sistem kendali untuk mengkompensasi deplesi bahan bakar dan pembentukan produk fisi dalam jangka waktu yang lama serta untuk membentuk distribusi daya di teras agar tercapai kondisi termal yang lebih baik dan burnup bahan bakar yang lebih uniform.

Tabel 10.1 menampilkan kebutuhan kendali reaktivitas untuk jenis PWR tipikal. Kebutuhan pada reaktor daya jenis lain besarnya sangat bervariasi, akan tetapi efek reaktivitas yang harus dapat dikompensasi dan kebutuhan akan waktu tanggap adalah umum untuk semua jenis reaktor. Nilai-nilai laju perubahan yang ada pada Tabel 10.1 juga bervariasi antara PWR yang satu dengan yang lain.

Tabel 10.1. *Persyaratan pengendalian reaktivitas PWR*

Efek reaktivitas	Besar (%)	Laju perubahan yang diperlukan (%)
Temperature defect	2–5	0,5/jam
Power defect	1–2	0,05/menit
Peracunan Xe dan Sm	2,5–3,0	0,004/menit
Deplesi	5–8	0,5/bulan
Pengaturan daya	0,1–0,2	0,1/menit
Xe *override*	0–1	0,004/menit
Pemadaman cepat (scram)	2–4	selesai dalam 1,5–2 detik

Penjelasan singkat mengenai berbagai komponen yang ada pada Tabel 10.1 adalah sebagai berikut.

10.1.1. *Temperature defect*, $\Delta\rho_{TD}$

Temperature defect didefinisikan sebagai perubahan reaktivitas yang terjadi di antara suhu pengisian bahan bakar dengan suhu operasi *zero power*. Ini utamanya sebagai konsekuensi dari koefisien reaktivitas suhu pendingin (moderator), MTC

$$\Delta\rho_{TD} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\rho}{dT}\, dT \tag{10.1}$$

dengan T_1 adalah suhu pemuatan bahan bakar dan T_2 adalah suhu operasi zero power.

Hampir semua reaktor bermoderator air ringan mempunyai α_T^M yang negatif sehingga *temperature defect* menyatakan rugi reaktivitas, kecuali pada PWR dengan racun terlarut yang dapat memberikan koefisien positif pada suhu pengisian bahan bakar.

10.1.2. *Power defect*, $\Delta\rho_{PD}$

Power defect menyatakan perubahan reaktivitas yang terjadi antara *zero power* dan *full power*.

$$\Delta\rho_{PD} = \int_{0}^{Q_0} \frac{d\rho}{dQ}\, dQ \tag{10.2}$$

dengan Q_0 adalah tingkat daya penuh dan $d\rho/dQ$ adalah koefisien daya total.

Koefisien daya tergantung dari perubahan suhu atau densitas yang terjadi pada berbagai komponen penyusun reaktor. Untuk sistem dengan fase tunggal

$$\frac{d\rho}{dQ} = \frac{\partial\rho}{\partial T_f}\frac{dT_f}{dQ} + \frac{\partial\rho}{\partial T_s}\frac{dT_s}{dQ} + \frac{\partial\rho}{\partial T_m}\frac{dT_m}{dQ} + \frac{\partial\rho}{\partial T_c}\frac{dT_c}{dQ} \tag{10.3}$$

dengan indeks f, s, m, c menyatakan bahan bakar, struktur, moderator dan pendingin. Pada BWR, fraksi void atau uap pendingin rata-rata akan mengalami variasi terhadap tingkat daya yang cukup signifikan pada laju aliran pendingin yang konstan dan variasi suhu pendingin rata-rata cukup kecil. Dengan demikian suku yang terkait dengan densitas pendingin harus ditambahkan ke Pers. (10.3). Pada BWR, suhu bahan bakar dan variasi densitas pendingin merupakan penyumbang terbesar terhadap koefisien daya.

Besar dan tanda dari komponen-komponen pada Pers. (10.3) dapat bervariasi secara signifikan antara reaktor yang satu dengan yang lain. Jika suhu pendingin masukan pada PWR divariasikan untuk mempertahankan suhu uap yang konstan, maka suhu rata-rata moderator harus bertambah seiring dengan kenaikan daya, dan komponen ini akan lebih negatif jika dibandingkan denga kondisi ketika suhu pendingin dipertahankan konstan selama perubahan tingkat daya. Pada reaktor-reaktor yang menggunakan uranium dioksida sebagai bahan bakarnya, komponen utama pada koefisien daya seringkali berasal dari suku yang pertama. Hal ini dikarenakan rendahnya konduktivitas termal bahan keramik sehingga akan memberikan kenaikan yang cukup besar pada dT_f/dQ dan pelebaran resonansi Dopple pada U-238 yang menyebabkan nilai besar pada $\partial\rho/\partial T_f$. Pada reaktor cepat, perhatian harus ditujukan juga pada desain teras untuk memastikan agar efek dari ekspansi termal tidak mengakibatkan komponen positif yang besar pada suku struktur dan pendingin di Pers. (10.3).

10.1.3. Racun produk fisi setimbang

Seperti yang telah dibahas pada Bab 8, Xe-135 dan Sm-149 akan memberikan sumbangan yang cukup signifikan terhadap pengurangan reaktivitas, yaitu sekitar 2,5% sampai dengan 3% pada reaktor termal yang beroperasi pada daya penuh.

10.1.4. Deplesi bahan bakar

Sebagaimana telah dibahas pada Bab 9, perubahan reaktivitas dapat terjadi ketika reaktor beroperasi dalam kondisi ajeg (*steady state*). Hal ini disebabkan karena hilangnya material fisil seperti U-235. Hal ini sebagian dikompensasi dengan konversi material fertil menjadi material fisil. Jumlah dari kompensasi ini tergantung dari nilai rasio konversi. Di samping itu terdapat juga pengurangan reaktivitas akibat pembentukan produk fisi yang tidak jenuh. Terakhir, pengurangan reaktivitas dapat terjadi akibat kenaikan bocoran neutron dari dalam teras. Densitas daya pada daerah tepi teras biasanya lebih rendah daripada nilai rata-rata densitas daya teras sehingga menyebabkan laju deplesi yang lebih rendah pada daerah ini. Laju deplesi yang tidak seragam ini akan menyebabkan redistribusi perlipatan neutron di dalam teras selama siklus berlangsung. Sebagai hasilnya, densitas daya di sekitar tepi teras cenderung untuk meningkat seiring dengan berjalannya deplesi, kecuali jika ada pengambilan material kendali dari daerah tengah teras. Jika pergeseran distribusi daya semacam ini terjadi, ia akan menyebabkan fraksi bocor neutron yang lebih besar dan konsekuensinya akan terjadi penurunan reaktivitas.

10.1.5. Kebutuhan akan *scram*

Kebutuhan akan reaktivitas *scram* selalu dipenuhi dengan batang kendali yang dapat digerakkan. Besarnya reaktivitas negatif yang harus dimasukkan dengan cepat sangat bervariasi dari satu sistem ke sistem yang lain. kenaikan reaktivitas akibat perubahan suhu komponen reaktor setelah *scram* juga harus ikut diperhitungkan.

10.2. Definisi

Beberapa definisi yang terkait dengan pengendalian reaktivitas:

1. *Excess reactivity*, ρ_{ex} :
   Reaktivitas teras ketika semua elemen kendali ditarik dari teras. ρ_{ex} merupakan fungsi waktu (akibat burnup bahan bakar dan produksi isotop) dan suhu (karena umpan balik reaktivitas).

2. *Shutdown margin*, ρ_{sm} :
   Reaktivitas negatif yang ada di teras ketika semua elemen kendali dimasukkan sepenuhnya untuk mencapai kondisi subkritis teras yang minimum. ρ_{sm} juga fungsi waktu dan suhu.
   Shutdown margin tidak hanya menentukan multiplikasi teras pada keadaan shutdown tetapi juga menyatakan laju turunnya tingkat daya ketika shutdown darurat atau scram. Ingat pendekata PJ :

$$\frac{\text{daya sebelum kendali masuk}}{\text{daya setelah kendali masuk}} = \frac{\beta - \rho_0}{\beta - \rho_1} = \frac{\beta}{\rho_{sm} + \beta} \tag{10.4}$$

3. *Total control element worth*, $\Delta\rho$:
   Perbedaan antara *excess reactivity* dengan reaktivitas minimum ketika semua elemen kendali masuk sepenuhnya,

$$\Delta\rho = \rho_{ex} + \rho_{sm} \tag{10.5}$$

Tabel 10.2. *Persyaratan pengendalian reaktivitas untuk berbagai jenis reaktor*

Reaktivitas ($\Delta k/k$)	BWR	PWR	HTGR	LMFBR
ρ_{ex} untuk teras bersih:				
68°F	0,25	0,293	0,128	0,050
suhu operasi		0,248		0,037
Xe,Sm setimbang		0,181	0,073	
ρ_{sm}				
Cold and clean	0,04	0,03	0,028	0,024
Hot dan Xe, Sm setimbang		0,14	0,082	0,037
$\Delta\rho$	0,29	0,32	0,256	0,074
CR worth	0,17	0,07	0,156	0,074
BP worth	0,12	0,08	0,100	
CS/SP worth		0,17		

10.3. Metode pengendalian reaktivitas

Ada tiga metode pengendalian yang digunakan secara luas pada reaktor nuklir, yaitu (i) control rods (batang kendali), (ii) burnable poison (racun dapat bakar) dan (iii) soluble poison (racun dapat larut).

Tampak dari Tabel 10.1 bahwa batang kendali memenuhi semua persyaratan waktu untuk semua efek reaktivitas. Akan tetapi pengaturan seluruhnya menggunakan batang kendali ada kekurangannya. Secara mekanis penggunaan batang kendali yang berlebihan akan menambah kompleksitas mekanis dan biaya teras. Di samping itu penggunaan batang kendali juga dapat menyebabkan gangguan yang besar terhadap densitas daya lokal pada elemen bahan bakar yang berdekatan dengan lokasi batang kendali ketika ia digerakkan. Hal ini dapat menyebabkan PCI (*pellet-clad interaction*) yang berlebihan. Perubahan bentuk daya reaktor ketika batang kendali bergerak masuk atau keluar teras juga akan terjadi, sehingga dapat menyebabkan kenaikan rasio antara daya puncak terhadap daya rata-rata dan mengurangi marjin operasi. Sebaliknya, penyisipan penyerap yang padat ke dalam teras biasanya menghasilkan koefisien reaktivitas suhu moderator yang semakin negatif.

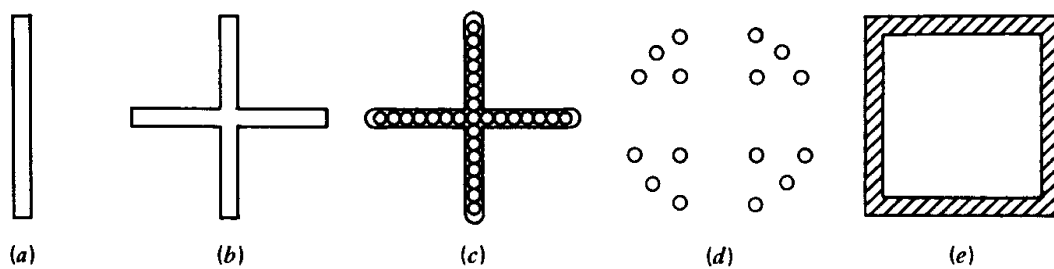
Konsep dasar pengendalian menggunakan racun dapat bakar (BP) adalah melakukan penambahan material dengan tampang lintang serapan yang tinggi pada posisi yang tetap di dalam reaktor yang kemudian mengalami transmutasi menjadi material lain dengan tampang lintang serapan yang rendah. Atau dengan kata lain, material tersebut *terbakar* seiring dengan deplesi bahan bakar. Karena letaknya yang tetap, BP hanya dimaksudkan untuk mengkompensasi deplesi. Penggunaan BP mempunyai beberapa keuntungan yang bersifat mengkompensasi penggunaan batang kendali. Sebagai contoh jumlah mekanisme CR yang diperlukan dapat dikurang. Penggunaan BP juga tidak mengakibatkan perubahan densitas daya lokal yang cepat karena deplesi berlangsung sangat lama dan penempatan BP dapat diatur dengan penempatan perangkat bahan bakar untuk menghindari *power peaking*. Di samping itu BP dapat memperbaiki distribusi daya apabila terdapat perbedaan yang besar pada kritikalitas reaktor antara perangkat bahan bakar yang fresh dan yang sudah terpakai. Meskipun demikian, pembakaran BP yang tak sempurna akan

menyisakan sejumlah kecil racun pada setiap EOC yang kemudian membutuhkan kompensasi dengan sedikit menambah pengisian bahan bakar.

Penggunaan racun neutron yang dilarutkan ke dalam asam borat ke dalam pendingin mempunyai beberapa keuntungan. Perubahan densitas racun yang uniform akan meminimalisasi gangguan profil daya spasial. Di samping itu racun terlarut (SP) dapat ditambahkan dan diambil dari pendingin primer sehingga SP dapat digunakan untuk mengkompensasi deplesi, *temperature defect* dan transien reaktivitas xenon maupun operasional. Akan tetapi penggunaan SP bukannya tanpa kelemahan. Seiring dengan kenaikan suhu pendingin, densitas air akan berkurang sehingga densitas atom racun juga akan berkurang. Hal ini akan menyebabkan menyebabkan MTC menjadi lebih positif.

Multiplikasi neutron dapat pula diubah dengan memvariasikan rasio moderasi atau kuantitas bahan fisil dalam reaktor atau yang dikenal dengan konsep "flow control". Misalnya pada BWR, fraksi uap dapat diubah dengan memvariasikan laju aliran pendingin sehingga mengubah perlipatan neutron. Pada reaktor fluidisasi, variasi laju aliran pendingin akan mengubah rasio antara moderasi dengan serapan. Konsep pengaturan multiplikasi neutron yang lain adalah konsep "spectral shift", misalnya dengan mengubah konsentrasi D_2O dan H_2O pada pendingin primer LWR.

10.4. Batang kendali

Volume di dalam daerah teras aktif pada sebuah reaktor nuklir harus dimanfaatkan sebaik mungkin. Volume yang tidak diisi oleh bahan bakar penghasil energi harus dibuat seminimum mungkin. Oleh karenanya, penggunaan yang efisien pada reaktor termal yang dikendalikan oleh batang racun yang dapat digerakkan adalah dengan menggunakan material dengan tampang lintang serapan yang tinggi yang akan memaksimalkan rasio antara luas permukaan dengan volume (SVR / *surface-to-volume ratio*). Alasan utama untuk mencari bentuk dengan SVR yang tinggi adalah untuk: (i) mendapatkan *worth* maximum per satuan volume dan (ii) mendapatkan *worth* maksimum per satuan berat penyerap. Gambar 10.1 menampilkan beberapa bentuk geometri batang kendali.

Gambar 10.1. *Bentuk geometri batang kendali. (a) Papan tipis. (b) Silang. (c) Silang dengan batang silinder. (e) Klaster batang kendali. (f) Flux trap.*

10.4.1. Kriteria desain batang kendali

Thermal worth

Pada reaktor termal, 60–80% dari total worth disebabkan oleh serapan neutron termal, di mana *self-shielding* material racun sangat signifikan pengaruhnya. Istilah yang umum untuk menyatakan absorptivitas untuk papan adalah $\Sigma_a t$, atau hasil kali antara tebal penyerap dengan tampang lintang serapan makroskopik. Jika $\Sigma_a t \geq 2$, papan disebut sebagai *"black absorber"*. Tabel 10.3 menampilkan perbandingan sifat-sifat serapan beberapa material kendali yang umum digunakan.

Tabel 10.3. *Sifat serapan neutron untuk beberapa bahan*

Material	σ_a (0,025ev) (barn)	Σ_a^T (cm^{-1})	Tebal untuk $\Sigma_a^T t = 2$ (cm)	RI (barn)	Densitas Penyerap (gmol/l)
Cd	2450	114	0,018	21	9,4
Gd dalam Gd_2O_3	49000	1244	0,0016	381	13
B dalam B_4C	759	83	0,024	341	36
Hf	102	4,7	0,428	2008	92
Ag-In-Cd (80%-15%-5%)	198	11,1	0,180	1060	89

Epithermal worth

Meskipun serapan neutron termal memberikan sumbangan yang lebih besar terhadap *worth* batang kendali pada reaktor termal, serapan epitermal juga harus dipertimbangkan. Kolom kelima pada Tabel 10.3 menunjukkan integral resonansi enceran tak hingga (*infinite dilution resonance integral*).

$$\mathrm{RI}_\infty = \int \sigma_a(E)\frac{dE}{E} \tag{10.6}$$

Nilai ini merupakan nilai tampang lintang mikroskopik yang diintegralkan terhadap energi pada fluks yang mempunyai variasi energi $1/E$ dan tidak terganggu oleh adanya penyerap, atau dengan kata lain fluks neutron tidak berperilaku seperti pada Gambar 5.3. RI_∞ merupakan indikasi keefektifan relatif material untuk menyerap neutron epitermal.

Pengaruh deplesi material

Secara umum absorpsi neutron mengakibatkan hilangnya atom penyerap, sehing ga batang kendali harus mempunyai densitas penyerap yang tinggi agar bisa bertahan lama. Terkait dengan hal ini, material dengan ketersediaan yang rendah dengan tampang lintang yang sangat tinggi masih kalah dengan material yang tampang lintangnya sedang–tinggi dan densitasnya juga tinggi. Kolom terakhir pada Tabel 10.3 menampilkan densitas atom penyerap. Tampak bahwa penyerap termal yang paling hitam mempunyai karakteristik yang paling buruk ditinjau dari densitas penyerap.

Beberapa unsur seperti europium dan hafnium memiliki rantai isotop penyerap neutron sehingga serapan neutron oleh satu isotop akan menghasilkan isotop lain dengan tampang lintang serapan yang tinggi. Tabel 10.4 menampilkan rantai serapan untuk hafnium.

Tabel 10.4. *Rantai serapan untuk hafnium.*

Isotop	Hf^{177} + n $\longrightarrow$	Hf^{178} + n $\longrightarrow$	Hf^{179} + n $\longrightarrow$	Hf^{180}
σ_a^{th} barn	365	86	45	13
$(RI)_\infty$ barn	7260	1950	600	43
Kelimpahan alami (%)	18,5	27,2	13,8	35,1

Faktor lain yang mempengaruhi kinerja batang kendali

Integritas mekanik. Reaksi tangkapan pada beberapa unsur seperti Cd dan Hf menghasilkan isotop dari unsur yang sama sehingga perubahan fisika dan kimia sangat kecil. Sebaliknya absorpsi neutron pada boron dapat menghasilkan helium dan lithium sehingga kelongsong batang kendali harus dapat mengakomodasi pembentukan tekanan helium dan harus tahan terhadap korosi oksida lithium.

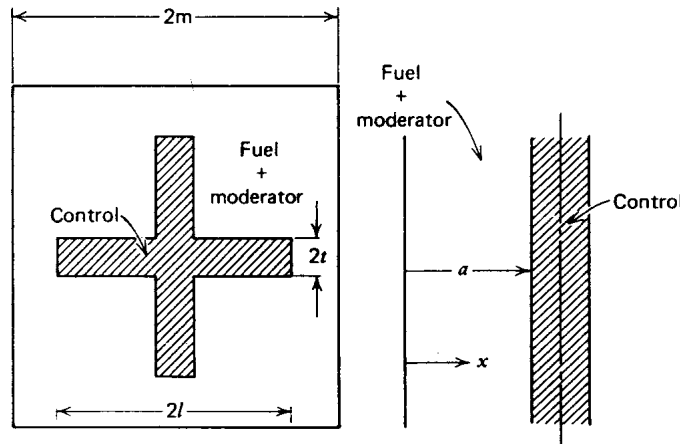
Kekuatan termal. Pemanasan batang kendali juga dapat menjadi masalah. Pemanasan ditimbulkan oeh dua sumber berikut ini: (1) energi dari partikel α dan β yang dihasilkan dari serapan neutron dan (2) sinar γ yang dihasilkan dari energi fisi.

Biaya. Biaya batang kendali merupakan fungsi dari biaya material mentah dan biaya fabrikasi. Meskipun desain mekanis untuk batang kendali tertentu sudah ditetapkan, penggantian material sangat mungkin dilakukan untuk mendapatkan batang kendali pengganti. Misalnya, hafnium dan B_4C dapat dipertimbangkan sebagai material pengganti untuk paduan Ag-In-Cd.

10.4.2. Perhitungan *worth* batang kendali

Perhitungan *worth* batang kendali merupakan proses yang sangat kompleks. Interaksi ruang-energi sangat penting dan gradien fluks spasial sangat besar baik di dalam dan di dekat material penyerap neutron sehingga penggunaan teori difusi secara langsung menjadi tidak valid. Oleh karena itu digunakan penggabungan perhitungan yaitu perhitungan teori difusi di luar elemen penyerap, perhitungan *Collision Probability Methods* (metode transport) di dalam elemen penyerap, dan menggabungkan kedua metode di batas elemen menggunakan "*blackness theory*".

Input yang dibutuhkan untuk perhitungan ini adalah rasio arus neutron netto terhadap fluks skalar di permukaan batang kendali. Rasio ini didefinisikan sebagai α

$$\alpha = \frac{\text{arus neutron netto di batang kendali}}{\text{fluks skalar di permukaan batang kendali}} \tag{10.7}$$

Gambar 10.2. *Geometri sel kendali. (Kiri) Sel kendali dua dimensi: m = tebal setengah sel; l = lebar setengah batang; t = setengah ketebalan batang kendali; $S/V = 2l/m^2 - 2tl + t^2$. (Kanan) Sel satu dimensi: a = setengah ketebalan daerah bahan bakar; t = setengah ketebalan batang kendali; $S/V = 1/a$.*

Nilai α merupakan fungsi dari komposisi dan geometri batang kendali, tetapi diasumsikan tidak tergantung kepada sifat-sifat hamburan dan serapan medium bahan bakar di sekelilingnya. Jika batang kendali bersifat *transparan* terhadap neutron, nilai $\alpha = 0$. Jika batang kendali bersifat *hitam*, yaitu jika tidak ada neutron yang ditransmisikan melalui batang kendali, maka $\alpha = 0,5$.

Prosedur perhitungan analogi dengan perhitungan homogenisasi sel bahan bakar. Elemen batang kendali tunggal serta bahan bakar yang terkait akan didefinisikan sebagai sel kendali. Sebagaimana pada kasus sel bahan bakar, asumsi arus neutron netto sama dengan nol di batas sel juga berlaku. Misal terdapat susunan larik penyerap berbentuk silang dengan sel satuan seperti pada Gambar 10.2.

Perhitungan dapat dilakukan terhadap sel dua dimensi seperti pada Gambar 10.2 kiri. Akan tetapi, jika panjang difusi medium sekitarnya, L, jauh lebih kecil daripada lebar batang $2l$, maka perhitungan dapat disederhanakan dengan menggunakan sel satu dimensi yang mempunyai rasio permukaan batang kendali terhadap volume bahan bakar yang sama besar. Dengan menggunakan Gambar 10.2 kanan, dapat diperoleh

$$a = \frac{m^2 - 2tl + t^2}{2l} \tag{10.8}$$

Model perhitungan kita sekarang adalah (setengah) papan bahan bakar – moderator dari $x = 0$ hingga $x = a$ dan (setengah) papan kendali dari $x = a$ hingga $x = a + t$, dengan syarat batas simetri pada $x = 0$ dan $x = a + t$. Persamaan difusi neutron berikut ini

$$-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a\phi(x) = S_0 \tag{10.9}$$

valid di papan bahan bakar–moderator, dengan S_0 adalah sumber neutron seragam yang mengalami perlambatan di daerah bahan bakar–moderator. Syarat batas simetri untuk perhitungan teori difusi adalah

$$\frac{d\phi(0)}{dx} = 0 \tag{10.10}$$

dan syarat batas transport

$$\frac{J(a)}{\phi(a)} = \alpha \tag{10.11}$$

digunakan pada batas antara bahan bakar–moderator dengan batang kendali. Parameter α harus ditentukan dari perhitungan teori transport di daerah batang kendali (tidak diuraikan di diktat ini). Untuk slab dengan lebar $2t$, perhitungan tersebut menghasilkan

$$\alpha = \frac{1 - 2E_3(2\Sigma_a^C t)}{2[1 + 3E_4(2\Sigma_a^C t)]} \tag{10.12}$$

dengan Σ_a^C adalah tampang lintang serapan batang kendali dan E_n adalah fungsi integral eksponensial

$$E_n(g) = \int_1^\infty e^{-gu} u^{-n}\, du \tag{10.13}$$

Persamaan untuk fluks dan arus neutron di daerah bahan bakar–moderator yang memenuhi Pers. (10.9) dengan syarat batas Pers. (10.10) adalah

$$\phi(x) = A \cosh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{S}{\Sigma_a} \tag{10.14}$$

$$J(x) = -\frac{D}{L} A \sinh\left(\frac{x}{L}\right) \tag{10.15}$$

dengan $L = \sqrt{D/\Sigma_a}$.

Dari Pers (10.11) dapat diperoleh koefisien

$$A = \frac{-\alpha(S/\Sigma_a)}{\alpha \cosh\left(\frac{a}{L}\right) + \Sigma_a L \sinh\left(\frac{a}{L}\right)} \tag{10.16}$$

Substitusi Pers. (10.16) ke Pers. (10.15) menghasilkan arus di permukaan

$$\begin{aligned} J(a) &= \frac{S\alpha L \sinh\left(\frac{a}{L}\right)}{\alpha \cosh\left(\frac{a}{L}\right) + \Sigma_a L \sinh\left(\frac{a}{L}\right)} \\ &= \frac{\alpha(S/\Sigma_a)}{1 + \left(\frac{\alpha}{\Sigma_a L}\right) \coth\left(\frac{a}{L}\right)} \end{aligned} \tag{10.17}$$

Untuk menghitung tampang lintang efektif batang kendali, terlebih dahulu harus terpenuhi syarat kesamaan laju serapan neutron di batang kendali berdasar perhitungan teori difusi dan teori transport

$$\Sigma_c^{eff} \overline{\phi} A_{sel} = P_c J_c \tag{10.18}$$

dengan $\overline{\phi}$ adalah fluks rerata berdasar teori difusi di daerah bahan bakar–moderator, $A_{sel} = ab$ adalah luasan sel, $P_c = b$ adalah perimeter antar muka batang kendali dengan daerah bahan bakar–moderator dan

J_c adalah arus neutron dari daerah bahan bakar–moderator di permukaan batang kendali. Diasumsikan pula bahwa semua neutron yang masuk ke batang kendali akan diserap.

Fluks rerata di daerah bahan bakar–moderator dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned}\overline{\phi} &= \frac{\displaystyle\int_0^a \phi(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^a dx} \\ &= \frac{S}{a\Sigma_a}\left[a - \frac{\alpha L}{\alpha \coth\left(\frac{a}{L}\right) + \Sigma_a L}\right]\end{aligned} \tag{10.19}$$

Dengan demikian tampang lintang efektif batang kendali dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}\Sigma_c^{eff} = \frac{P_c}{A_{sel}}\frac{J_c}{\overline{\phi}} &= \frac{1}{a}\frac{J(a)}{\overline{\phi}} \\ &= \frac{\Sigma_a}{a\left[\frac{\Sigma_a}{\alpha} + \frac{1}{L}\coth\left(\frac{a}{L}\right)\right] - 1}\end{aligned} \tag{10.20}$$

Ada beberapa hal yang bisa dicermati dari Pers. (10.20) terkait dengan *worth* batang kendali.

1. Karena $\coth(a/L)$ bernilai sangat dekat dengan satu untuk nilai a/L lebih dari 2, serapan pada susunan batang kendali adalah sebanding dengan permukaan batang kendali jika permukaan batang dipisahkan oleh 4 kali panjang difusi atau lebih. Jika pemisahan kurang dari nilai tersebut, *worth* tidak lagi inear terhadap permukaan batang kendali, atau dengan kata lain terdapat efek bayangan batang kendali (*rod shadowing effect*).

2. Serapan batang kendali juga meningkat apabila panjang difusi, L, bertambah.

3. Fraksi serapan batang kendali akan berkurang apabila tampang lintang serapan bahan bakar meningkat. Hal ini dikarenakan kenaikan serapan di bahan bakar akan menurunkan panjang difusi neutron.

10.5. Racun dapat bakar

Penggunaan racun dapat bakar dimaksudkan untuk mengkompensasi hilangnya reaktivitas akibat deplesi bahan bakar dan pembentukan produk fisi. Material racun dapat bakar harus memenuhi persyaratan sebagai berikut:

1. Tampang lintang tangkapan material racun harus lebih besar daripada bahan fisil sehingga sisa racun pada EOC cukup rendah. Tampang lintang tangkapan juga harus cukup rendah sehingga racun tidak terbakar habis sebelum terjadi hilangnya reaktivitas akibat deplesi yang cukup signifikan.

2. Produk reaksi dari BP hendaknya mempunyai tampang lintang yang rendah sehingga pembentukannya tidak mengurangi panjang siklus operasi reaktor.

3. Bahan racun maupun produk reaksinya tidak boleh membahayakan integritas mekanik reaktor.

Terdapat dua jenis penggunaan racun dapat bakar, yaitu homogen dan heterogen. Racun dapat bakar disebut homogen jika konsentrasi racun cukup encer sehingga ia terpapar oleh kira-kira fluks rata-rata yang sama dengan bahan bakar. Sebaliknya, racun dapat bakar disebut heterogen jikga material racun terkumpul atau terkonsentrasi pada elemen-elemen tertentu sedemikian rupa sehingga dapat dijumpai efek *self-shielding* racun yang cukup signifikan.

10.5.1. Racun dapat bakar homogen

BP disebut homogen jika konsentrasi racun cukup encer sehingga ia terpapar oleh kira-kira fluks rata-rata yang sama dengan bahan bakar. Anggap reaktor dengan komposisi yang uniform dan hanya terdiri dari satu jenis isotop fisil dan tidak ada isotop fertil, serta peracunan produk fisi merupakan fungsi linear dari deplesi bahan bakar. Faktor perlipatan neutron dapat dituliskan sebagai;

$$k_{eff} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} P_{NL} = \frac{\eta\sigma_a^F N^F P_{NL}}{(\sigma_a^F N^F + \sigma_a^P N^P + \Sigma_a^K + \sigma_a^{FP} N^{FP})} \tag{10.21}$$

superscript F, P dan FP menyatakan bahan bakar, racun dapat bakar dan produk fisi. Σ_a^K adalah serapan parasitik pada struktur, pendingin, moderator dan produk fisi yang lain dan diasumsikan konstan sepanjang siklus.

Persamaan yang menunjukkan variasi N^F, N^P dan N^{FP} adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN^F}{dt} = -\sigma_a^F \phi N^F \tag{10.22}$$

$$\frac{dN^P}{dt} = -\sigma_a^P \phi N^P \tag{10.23}$$

$$\frac{N^{FP}}{dt} = \Sigma_f \phi = \frac{\sigma_a^F}{1+\alpha^F} \phi N^F \tag{10.24}$$

dengan α^F adalah rasio tangkapan terhadap fisi.

Penyelesaian persamaan di atas:

$$N^F = N_0^F e^{-\sigma_a^F \theta} \tag{10.25}$$

$$N^P = N_0^P e^{-\sigma_a^P \theta} \tag{10.26}$$

$$N^{FP} = \frac{N_0^F}{1+\alpha^F}\left(1 - e^{-\sigma_a^F \theta}\right) \tag{10.27}$$

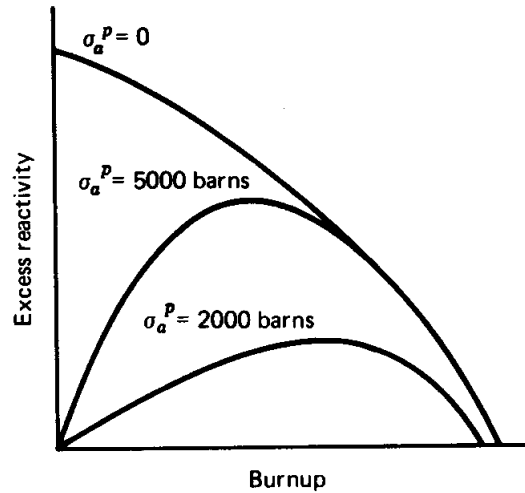
dengan

$$\theta = \int_0^T \phi(t)dt$$

Pers. (10.21) kemudian dapat ditulis menjadi

$$k_{eff} = \frac{\eta^F P_{NL}}{1 + \frac{\sigma_a^P}{\sigma_a^F}\frac{N_0^P}{N_0^F} e^{-(\sigma_a^P - \sigma_a^F)\theta} + \frac{\Sigma_a^K}{\sigma_a^F N_0^F} e^{\sigma_a^P \theta} + \frac{\sigma_a^{FP}}{\sigma_a^F(1+\alpha^F)}\left(e^{\sigma_a^F \theta} - 1\right)} \tag{10.28}$$

Suku kedua pada penyebut berkurang seiring dengan waktu iradiasi asalkan nilai σ_a^P melebihi σ_a^F, yang berarti bahwa laju pembakaran racun dapat bakar lebih cepat daripada laju pembakaran bahan bakar. Suku ketiga dan keempat akan meningkat seiring dengan waktu iradiasi. Suku keempat akan meningkat dengan cepat karena konsentrasi konsentrasi produk fisi sebanding dengan deplesi bahan bakar.

Tujuan yang ingin dicapai dengan menganalisis Pers. (10.28) adalah mencari kombinasi N_0^P dan σ_a^P yang akan meminimalisasi banyaknya reaktivitas lebih. Langkah pertama yang dilakukan adalah memilih nilai $N_0^P \sigma_a^P$ yang menghasilkan k_{eff} sama dengan satu pada saat awal reaktor beroperasi dan kemudian menggunakan Pers. (10.28) untuk mempelajari variasi k_{eff} terhadap waktu. Gambar 10.3 membandingkan hasil proses perhitungan tersebut untuk beberapa nilai σ_a^P dengan kurva deplesi untuk kondisi reaktor tanpa racun dapat bakar.

Gambar 10.3. *Perbandingan k_{eff} terhadap waktu untuk beberapa nilai tampang lintang racun dapat bakar*

Jika tampang lintang racun dapat bakar terlalu tinggi, atom-atom racun akan terdeplesi begitu cepat sehingga terjadi ketidakseimbangan antara deplesi racun dapat bakar dengan deplesi bahan bakar. Jika digunakan material dengan tampang lintang serapan yang lebih rendah, ketidakseimbangan tersebut menjadi lebih sedikit tetapi terdapat sisa racun dapat bakar pada akhir siklus sehingga menyebabkan berkurangnya umur operasi reaktor.

10.5.2. Racun dapat bakar heterogen

Dari permasalahan yang muncul pada penggunaan racun dapat bakar secara homogen, dapat disimpulkan bahwa isotop yang ideal akan mempunyai tampang lintang serapan yang hampir sama, tetapi lebih besar, daripada tampang lintang bahan bakar untuk dua pertiga yang pertama dari siklus operasi agar dapat sesuai dengan karakteristik deplesi bahan bakar, dan sangat tinggi menjelang akhir siklus agar pembakaran atom racun yang tersisa dapat berlangsung sangat cepat. Penggunaan racun dapat bakar yang mendekati kondisi ideal ini dapat dicapai dengan menaruh racun pada elemen-elemen diskret dengan konsentrasi yang cukup untuk mengurangi fluks rata-rata di mana racun tersebut terkena.

Dalam kondisi semacam ini, persamaan deplesi racun, Pers. (10.26), menjadi

$$\frac{dN^P}{dt} = -g(t)\sigma_a^P N^P \phi \tag{10.29}$$

dengan $g(t)$ adalah rasio antara fluks rata-rata di dalam racun terhadap fluks rata-rata di bahan bakar. Fungsi $g(t)$ gayut terhadap waktu, geometri elemen racun dan konsentrasi awal racun.

10.5.3. Material racun dapat bakar

Material yang telah digunakan sebagai racun dapat bakar adalah senyawa kimia boron (B_4C), gadolinium (Gd_2O_3) dan erbium (Er_2O_3). Akhir-akhir ini dysprosium juga telah digunakan pada reaktor-reaktor CANDU. Vendor-vendor reaktor nuklir telah mendesain beberapa racun dapat bakar dan menunjukkan adanya peningkatan kinerjanya. Beberapa desain tersebut adalah sebagai berikut:

Pyrex

Material ini berupa kaca borosilikat di dalam tabung stainless steel yang dikembangkan oleh Westinghouse. Bahan penyerap neutron yang digunakan adalah B-10. Tambahan pengurangan reaktivitas dicapai melalui serapan neutron oleh stainless steel. Batang penyerap dapat bakar masing-masing disisipkan ke lokasi tabung pengarah batang kendali tertentu dan diambil setelah satu siklus. Keuntungan penggunaan Pyrex adalah ketersediaan, kemudahan dalam pembuatannya, dan distribusi boron yang seragam di dalam kaca. Kekurangan dari Pyrex adalah tingginya reaktivitas sisa pada akhir siklus.

Wet Annular Burnable Absorber (WABA)

Material ini merupakan pengembangan terhadap Pyrex. Disebut "basah" dan "anular" karena pendingin reaktor mengalir melalui lintasan anulus pusat. Material penyerap neutron adalah aluminium oksida dan boron karbida (Al_2O_3-B_4C). Penyerap neutron ditaruh di dalam tabung anulus terbuat dari zircaloy dengan air yang mengalir di bagian tengah dan luar serta tidak terdapat stainless steel. Perbaikan desain terletak pada pelet yang berisi boron menjadi lebih tipis dan pengaruh moderasi dari air yang melewati bagian pusat akan meningkatkan deplesi boron sehingga mengurangi reaktivitas sisa di akhir siklus secara signifikan. WABA dipasang dengan cara yang sama seperti Pyrex dan diambil setelah satu siklus operasi.

Integral Fuel Burnable Absorber (IFBA)

Juga dikembangkan oleh Westinghouse, material ini berupa zirkonium diborida (ZrB_2) dan diterapkan sebagai lapisan tipis pada setiap pelet. Material ini dapat dilapiskan pada permukaan pelet pada pengkayaan tertentu atau pada sebagian dari panjang batang bahan bakar untuk mengatur pemuncakan daya. Penggunaan IFBA memerlukan prediksi yang akurat mengenai pelepasan gas fisi karena B-10 menghasilkan gas helium di dalam batang bahan bakar. Penggunaan IFBA lebih baik daripada batang penyerap dapat bakar. Hal ini karena batang penyerap dapat bakar akan memindahkan sejumlah volume air sehingga akan mengurangi termalisasi neutron yang selanjutnya akan mengurangi reaksi fisi. Sebaliknya, penerapan IFBA secara langsung pada pelet tidak mempengaruhi volume air di dalam teras sehingga menyebabkan penggunaan neutron yang lebih efisien.

Gadolinium-Uranium Burnable Poison

Material penyerap ini telah dikembangkan pada desain reaktor yang berbeda, misal oleh Combustion Engineering (CE) untuk PWR, oleh Westinghouse untuk BWR dan oleh General Electric (GE) untuk BWR. Material penyerapnya adalah Gd_2O_3-UO_2 yang berada di dalam batang bahan bakar tertentu. Pada desain CE, batang racun dapat bakar terdiri dari pelet uranium alami-gadolinium di bagian tengah dengan pelet uranium alami di kedua ujung pin bahan bakar.

Gadolinium cukup menarik sebagai material racun karena ia dapat dicampur secara langsung dengan UO_2. Dua kelebihan utama penggunaan Gd_2O_3-UO_2 dibandingkan dengan B_4C-Al_2O_3 adalah berkurangnya laju kalor linear dan pengkayaan rata-rata yang lebih rendah.

Gadolinium alami terdiri dari dua isotop yaitu Gd-155 dan Gd-157 dengan kelimpahan masing-masing sebesar 14,7% dan 15,7%. Tampang lintang untuk Gd-155 adalah sebesar 58.000 barn dan untuk Gd-157 sebesar $2,4 \times 10^5$ barn. Pengkayaan isotop Gd-157 telah dilaporkan dapat meningkatkan kinerja racun dapat bakar.

10.6. Chemical shim

Salah satu alternatif penggunaan racun dapat bakar adalah racun yang terlarut ke dalam pendingin reaktor (*soluble poison*), atau lebih dikenal dengan istilah *chemical shim*. Material yang cocok sebagai chemical shim adalah isotop yang mempunyai tampang lintang serapan yang tinggi serta harus dapat larut ke dalam pendingin reaktor. Selain itu material tersebut juga harus bersifat tidak korosif dan relatif stabil. Meskipun cadmium sulfat ($CdSO_4$) telah sering digunakan di beberapa reaktor, penggunaan asam borat (H_3BO_4) digunakan khususnya di PWR.

Konsentrasi boron yang terkontrol di pendingin digunakan untuk:

1. mendapatkan efek peracunan yang optimum pada perangkat bahan bakar
2. mengkompensasi perubahan reaktivitas yang terkait dengan perubahan suhu pendingin reaktor antara operasi *cold shutdown* dan *hot full-power*
3. mengkompensasi burnup bahan bakar

4. mengkompensasi pembentukan racun produk fisi

5. menyediakan marjin shutdown selama operasi pengisian ulang bahan bakar dan perbaikan.

Keuntungan utama dari chemical shim adalah perbaikan keseragaman distribusi daya reaktor dan pengurangan kompleksitas mekanis teras. Kekurangan utamanya adalah rendahnya laju penambahan maupun pengurangan konsentrasi racun dari pendingin reaktor dan efeknya terhadap koefisien suhu moderator.

Perhitungan hubungan antara konsentrasi boron dan reaktivitas diperoleh dengan dasar bahwa chemical shim mempengaruhi raktivitas teras reaktor termal dengan jalan mengubah faktor penggunaan termal (f). Karena konsentrasi boron di pendingin relatif rendah, sifat-sifat transport teras masih tetap sama setelah boron ditambahkan ke air. Dengan mengasumsikan konsentrasi boron di moderator adlaah seragam, *worth* reaktivitas racun dapat dihitung sebagai berikut

$$\rho_B = \frac{\overline{\Sigma}_a^B}{\overline{\Sigma}_a^F + \overline{\Sigma}_a^M} \tag{10.30}$$

Dihubungkan dengan faktor penggunaan termal tanpa boron (f_0), Pers. (10.30) menjadi

$$\rho_B = (1 - f_0)\,\frac{\overline{\Sigma}_a^B}{\overline{\Sigma}_a^M} \tag{10.31}$$

dengan

$$\frac{f_0}{1 - f_0} = \frac{\overline{\Sigma}_a^F}{\overline{\Sigma}_a^M} \tag{10.32}$$

Jika konsentrasi asam borat dinyatakan dengan C ppm, maka dikaitkan dengan massa air dan boron, C dapat dinyatakan sebagai

$$C = 10^6 \left(\frac{m_B}{m_M}\right) \tag{10.33}$$

Dari Pers. (10.31) dan (10.33) dan juga dari hubungan antara tampang lintang mikroskopis dengan makroskopis, *worth* reaktivitas boron dapat ditulis sebagai

$$\rho_B = (1 - f_0)\, C \frac{A_M}{A_B} \frac{\sigma_B}{\sigma_M} \times 10^{-6} \tag{10.34}$$

dengan $A_M = 18, A_B = 10,81$, σ_M dan σ_B adalah tampang lintang serapan rerata spektrum untuk air dan boron alami. Jika digunakan nilai tipikal sebesar 0,66 b dan 759 b, maka Pers. (10.34) menjadi

$$\rho_B = 1,92 \times 10^{-3} \cdot C\,(1 - f_0) \tag{10.35}$$

Keterbatasan utama dalam penggunaan chemical shim terletak pada pengaruhnya terhadap koefisien reaktivitas suhu moderator. Jika suhu air meningkat, densitas moderator dan racun akan berkurang. Sebagai akibatnya, efek reaktivitas chemical shim berkurang sehingga memberikan penambahan nilai koefisien reaktivitas suhu moderator yang positif. Jadi jika konsentrasi boron terlarut cukup tinggi, ni-

lai neto MTC menjadi positif. Penambahan racun dapat bakar dapat mempertahankan konsentrasi boron cukup rendah pada BOC sehingga MTC dapat dipertahankan dalam rentang batas aman.

Bagian mekanis dari sistem chemical shim terdiri dari demineralizer, filter, pendingin (*cooler*) dan pompa. Pipa ke bejana reaktor mempunyai diameter yang kecil untuk mencegah perubahan konsentrasi boron yang cepat pada kalang primer. Untuk mengubah konsentasi, asam borat harus dipompa ke bejana raktor atau air pendingin primer harus dipompa melewati pendingin ke demineralizer yang akan mengambil boron. Air murni kemudian dipompa kembali ke kalang primer. Proses ini disebut dengan "*feed-and-bleed*". Proses feed-and-bleed mengambil air pendingin dengan laju yang sama dengan injeksi fluida yang baru sehingga volume air pendingin yang konstan dapat dipertahankan.

Perubahan reaktivitas sebagai hasil pengambilan boron dapat dihitung sebagai berikut. Misal suatu sistem mengandung fluida dengan volume total sebesar V dengan konsentrasi racun terlarut sebesar $C(t)$ dalam kilogram per liter pada waktu t. Untuk menaikkan konsentrasi racun, larutan yang lebih pekat dengan konsentrasi sebesar C_n kilogram per liter ditambahkan ke sistem dengan laju sebesar w liter per detik. Pada saat yang sama, fluida dengan konsentrasi $C(t)$ harus diambil agar volume total fluida tetap konstan. Persamaan yang menyatakan proses tersebut adalah

$$\frac{dC(t)}{dt} = [C_n - C(t)] \frac{w}{V} \tag{10.36}$$

Untuk mengurangi konsentrasi racun, air murni ($C_n = 0$) ditambahkan. Karena perubahan reaktivitas sebanding dengan konsentrasi racun, maka dapat ditulis

$$\rho_B(t) = \rho_0 + \alpha_B C(t) \tag{10.37}$$

dengan α_B adalah reaktivitas per satuan konsentrasi boron di dalam pendingin dan ρ_0 adalah reaktivitas pada saat $t = 0$. Dengan mendiferensialkan Pers.(10.37) diperoleh

$$\frac{d\rho_B(t)}{dt} = \alpha_B [C_n - C(t)] \frac{w}{V} \tag{10.38}$$

yang menyatakan bahwa laju perubahan reaktivitas sebanding dengan konsentrasi racun.

LATIHAN

1. Fluks termal yang terukur pada permukaan batang kendali *scram* di sebuah reaktor riset adalah 3×10^{12} n/cm^2-s. Batang kendali tersebut terbuat dari baja stainless dengan 2% berat boron.

   Berapa lama waktu yang diperlukan agar boron di permukaan batang terbakar sampai 90% jika diketahui tampang lintang serapan σ_a boron di energi 0,025 eV sebesar 796 barn?

2. Sebuah reaktor berbentuk silinder polos dengan tinggi terekstrapolasi sebesar 70 cm berisi campuran air ringan dan ^{235}U pada suhu kamar.

   (a) Berapa besarnya *worth* batang kendali berjari-jari 1,9 cm yang dimasukkan di pusat reaktor?

   (b) Jika akan digunakan boron terlarut untuk mengendalikan reaktivitas teras, berapa konsentrasi boron dalam ppm yang diperlukan untuk menggantikan batang kendali tersebut di atas?

   (c) Jika dikehendaki reaktor dikendalikan dengan satu batang kendali pusat dengan *worth* 10%, seberapa besar ukuran batang kendali tersebut?

3. Sebuah PLTN tipe PWR akan dikendalikan menggunakan 61 kluster perangkat kendali, di mana setiap perangkat terdiri dari 20 batang hitam berdiameter 1,15 cm. Geometri teras reaktor adalah silinder dengan diameter 320 cm. Panjang difusi termal rerata di teras adalah 1,38 cm, $D = 0{,}21$ cm dan Σ_t material teras kira-kira 2,6 cm^{-1}.

   Tentukan berapa besarnya *worth* total batang kendali.

4. Sebuah reaktor tak hingga besar berbahan bakar ^{235}U dengan moderator air ternyata mengandung 20% lebih banyak ^{235}U daripada yang diperlukan untuk menjadi kritis.

   Tentukan konsentrasi:

   (a) boron dalam ppm, atau

   (b) asam borat dalam g/liter

   yang diperlukan untuk menjaga reaktor tetap kritis.

Lampiran

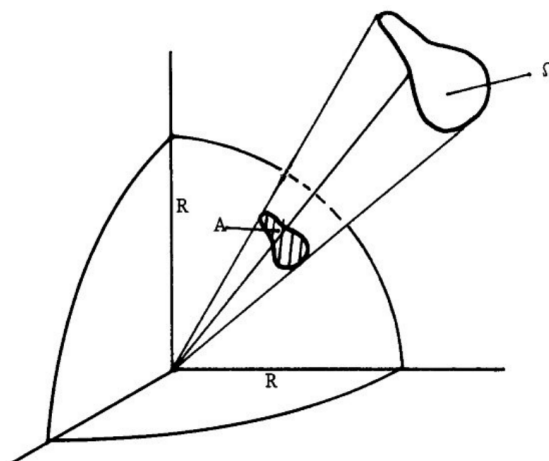
Lampiran A

Sudut Ruang

A.1. Definisi sudut ruang

Ukuran dari sudut ruang Ω didefinisikan oleh luasan yang diiris dari bola dengan jari-jari R, dibagi dengan kuadrat jari-jari bola (lihat Gambar A.1).

$$\Omega = \frac{A}{R^2} \tag{A.1}$$

di mana besarnya sudut ruang tidak tergantung kepada jari-jari yang dipilih pada bola tersebut. Sudut ruang diukur dalam steradian, disingkat ster. Sudut ruang maksimum yang menyangkut semua arah adalah luasan yang sama dengan luasan permukaan bola total $4\pi R^2$, sehingga besar sudut ruang maksimum adalah 4π.

Gambar A.1. *Definisi sudut ruang.*

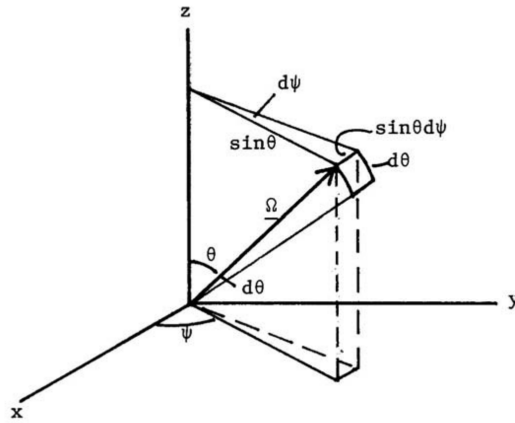
A.2. Integral terhadap arah Ω

Vektor arah $\mathbf{\Omega}$ dapat dinyatakan dalam dua variabel skalar, yaitu sudut polar θ dan sudut azimut ψ dengan $0 \leq \theta \leq \pi$ dan $0 \leq \psi \leq 2\pi$ (lihat Gambar A.2). Dengan memvariasikan sudut-sudut ini, sudut ruang $d\Omega$ yang sama dengan luas permukaan bola dengan radius satuan dapat dideskripsikan:

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\psi \tag{A.2}$$

Dengan demikian, integrasi terhadap $\mathbf{\Omega}$ dapat dituliskan sebagai integral ganda terhadap variabel-variabel skalar tersebut. Biasanya lebih mudah untuk bekerja dengan $\mu = \cos\theta$ daripada dengan θ itu sendiri. Oleh karenanya

$$d\Omega = d\mu \, d\psi \tag{A.3}$$

dengan $-1 \leq \mu \leq 1$.

Gambar A.2. *Pengintegralan terhadap arah* $\mathbf{\Omega}$.

Pengintegralan $\mathbf{\Omega}$ terhadap sudut ruang 4π:

$$\int_{4\pi} d\Omega = 4\pi \tag{A.4}$$

$$\int_{4\pi} \mathbf{\Omega} d\Omega = 0 \tag{A.5}$$

$$\int_{4\pi} \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{a}) d\Omega = \frac{4\pi}{3}\mathbf{a} \tag{A.6}$$

denan **a** adalah vektor konstan (yang tidak gayut pada $\mathbf{\Omega}$). ketika memilih sistem koordinat untuk mendefinisikan θ dan ψ, biasanya sumbu polar dipilih sepanjang vektor **a** di mana sudut θ diukur. Pada integral kedua dan ketiga, diperlukan komponen-komponen $\mathbf{\Omega}$ yang terpisah:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sin\theta \, \cos\psi \\ \sin\theta \, \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

Lampiran B

Operator Nabla

Operator nabla ∇ dapat diinterpretasikan sebagai vektor dengan komponen

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{B.1}$$

Penerapan operator tersebut terhadap medan skalar $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$ menghasilkan vektor

$$\nabla \phi = \text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \tag{B.2}$$

Untuk koordinat bola dengan simetri:

$$\nabla \phi = \frac{d\phi}{dr} \tag{B.3}$$

dengan arah yang sama dengan koordinat vektor **r**.

Penerapan operator nabla terhadap vektor sebagai perkalian dalam akan menghasilkan skalar

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{B.4}$$

Operator Laplace $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ yang beroperasi terhadap skalar dapat disusun sebagai berikut

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \tag{B.5}$$

Untuk koordinat bola dengan simetri bola:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \tag{B.6}$$

Untuk koordinat silinder dengan simetri rotasi:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \tag{B.7}$$

Divergensi teorema Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\, dS \tag{B.8}$$

Teorema Green

$$\int \nabla\phi \cdot \nabla\psi\, dV = \int \phi\mathbf{n} \cdot \nabla\psi\, dS - \int \phi\nabla^2\psi\, dV \tag{B.9}$$

$$\int (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \int \mathbf{n} \cdot (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\, dS \tag{B.10}$$

Lampiran C

Fungsi Spesial

C.1. Ekspansi polinomial Legendre

Persamaan yang mendefinisikan:

$$(1-\mu^2)f'' - 2\mu f' + n(n+1)f = 0, \quad n = \text{integer} \tag{C.1}$$

Polinomial Legendre $P_n(\mu)$ didefinisikan sebagai

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n \tag{C.2}$$

dengan

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1 \\ P_1(\mu) &= \mu \\ P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2-1) \\ P_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu) \end{aligned}$$

Terdapat relasi rekurensi antar polinomial Legendre

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0 \tag{C.3}$$

$$P'_{n+1}(\mu) - \mu P'_n(\mu) = (n+1)P_n(\mu) \tag{C.4}$$

Pada interval $-1 \leq \mu \leq 1$, polinomial Legendre bersifat ortogonal

$$\int_{-1}^{1} P_m(\mu)P_n(\mu)\,d\mu = \begin{cases} 0, & \text{untuk } m \neq n \\ \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{untuk } m = n \end{cases} \tag{C.5}$$

Sifat ortogonalitas ini memungkinkan ekspansi fungsi real $f(\mu)$ integrasi kuadratik yang dapat terjadi pada interval $-1 \leq \mu \leq 1$ menjadi deret polinomial Legendre:

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n P_n(\mu) \tag{C.6}$$

dengan koefisien f_n dinyatakan sebagai

$$f_n = \int_{-1}^{1} f(\mu)P_n(\mu)d\mu \tag{C.7}$$

C.2. Fungsi Bessel

Persamaan yang mendefinisikan :

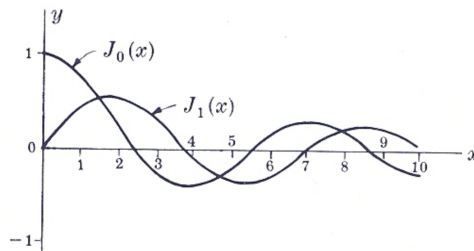
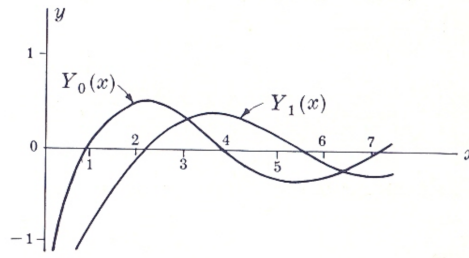
$$x^2 f'' + xf' + (x^2 - n^2)f = 0 \tag{C.8}$$

Solusi dari persamaan tersebut dinyatakan dengan $J_n(x)$ yang disebut dengan fungsi Bessel jenis pertama dan $Y_n(x)$ yang disebut dengan fungsi Bessel jenis kedua.

Gambar C.1 dan C.2 menampilkan kedua fungsi Bessel untuk orde ke-0 dan ke-1.

Kedua fungsi Bessel tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk deret sebagai berikut

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \tag{C.9}$$

$$Y_n = \frac{J_n(x)\cos(n\pi)\; J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \tag{C.10}$$

Gambar C.1. *Representasi grafis fungsi Bessel J_0 dan J_1.*

Gambar C.2. *Representasi grafis fungsi Bessel Y_0 dan Y_1.*

Di samping itu, fungsi Bessel $J_n(x)$ dan $Y_n(x)$ juga terhubung dalam bentuk fungsi Hankel:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \tag{C.11}$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \tag{C.12}$$

Selain fungsi Bessel tersebut di atas, terdapat juga jenis lain dari fungsi Bessel yang merupakan solusi dari persamaan

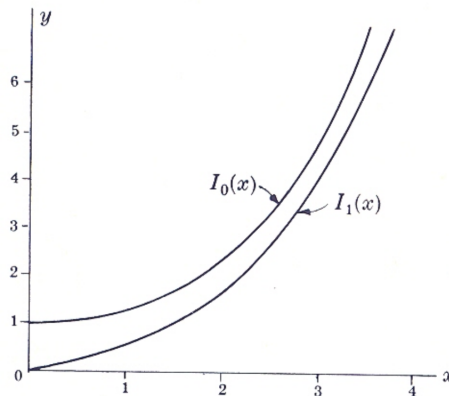
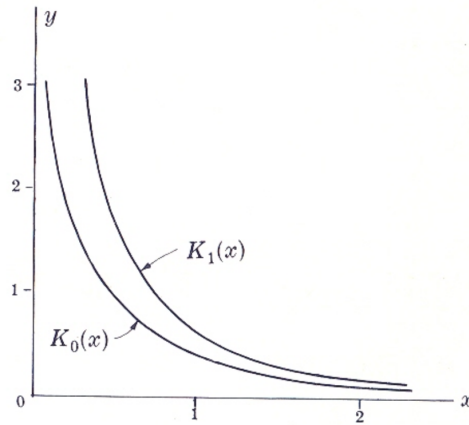
$$x^2 f'' + xf' - (x^2 + n^2)f = 0 \tag{C.13}$$

Solusi tersebut adalah $I_n(x)$ yang disebut dengan fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama, dan $K_n(x)$ yang disebut dengan fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua.

Gambar C.3 dan C.4 menampilkan kedua fungsi Bessel termodifikasi untuk orde ke-0 dan ke-1.

Kedua fungsi Bessel termodifikasi juga dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = i^n J_n(-ix) \tag{C.14}$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{-n-1} H_n^{(2)}(-ix) \tag{C.15}$$

Gambar C.3. *Representasi grafis fungsi Bessel termodifikasi I_0 dan I_1.*

Gambar C.4. *Representasi grafis fungsi Bessel K_0 dan K_1.*

Ekspansi fungsi Bessel untuk nilai x kecil

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \ldots \quad \text{(C.16)}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \ldots \quad \text{(C.17)}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \frac{x^2}{4} + \ldots\right], \quad \gamma = 0,577216 \quad \text{(C.18)}$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{x}{4}\ldots\right] \quad \text{(C.19)}$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304}\ldots \quad \text{(C.20)}$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \ldots \quad \text{(C.21)}$$

$$K_0(x) = -\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) I_0(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{128} + \ldots \quad \text{(C.22)}$$

$$K_1(x) = \left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) I_1(x) + \frac{1}{x} - \frac{x}{4} - \frac{5x^3}{64} + \ldots \quad \text{(C.23)}$$

Ekspansi asimtotik untuk nilai x besar

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+\frac{1}{8x}+\ldots\right) \tag{C.24}$$

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{3}{8x}+\ldots\right) \tag{C.25}$$

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1-\frac{1}{8x}+\ldots\right) \tag{C.26}$$

$$K_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1+\frac{3}{8x}+\ldots\right) \tag{C.27}$$

(C.28)

Hubungan rekurensi

$$xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1} = -nJ_n + xJ_{n-1} \tag{C.29}$$

$$2nJ_n = xJ_{n-1} + xJ_{n+1} \tag{C.30}$$

$$xI_n' = nI_n + xI_{n+1} = -nI_n + xI_{n-1} \tag{C.31}$$

$$xK_n' = nK_n - xK_{n+1} = -nK_n - xK_{n-1} \tag{C.32}$$

$$J_0' = -J_1 \tag{C.33}$$

$$Y_0' = -Y_1 \tag{C.34}$$

$$I_0' = I_1 \tag{C.35}$$

$$K_0' = K_1 \tag{C.36}$$

Integral

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n \tag{C.37}$$

$$\int x^n Y_{n-1}(x)dx = x^n Y^n \tag{C.38}$$

$$\int x^n I_{n-1}(x)dx = x^n I_n \tag{C.39}$$

$$\int x^n K_{n-1}(x)dx = -x^n K_n \tag{C.40}$$

Tabel Fungsi Bessel

x	$J_0 x$	$J_1 x$	$Y_0 x$	$Y_1 x$	$I_0 x$	$I_1 x$	$K_0 x$	$K_1 x$
0	1.0000	0.0000	$-\infty$	$-\infty$	1.000	0.0000	∞	$-\infty$
0.05	0.9994	0.0250	−1.979	−12.79	1.001	0.0250	3.114	19.91
0.10	0.9975	0.0499	−1.534	−6.459	1.003	0.0501	2.427	9.854
0.15	0.9944	0.0748	−1.271	−4.364	1.006	0.0752	2.030	6.477
0.20	0.9900	0.0995	−1.081	−3.324	1.010	0.1005	1.753	4.776
0.25	0.9844	0.1240	−0.9316	−2.704	1.016	0.1260	1.542	3.474
0.30	0.9776	0.1483	−0.8073	−2.293	1.023	0.1517	1.372	3.056
0.35	0.9696	0.1723	−0.7003	−2.000	1.031	0.1777	1.233	2.559
0.40	0.9604	0.1960	−0.6060	−1.781	1.040	0.2040	1.115	2.184
0.45	0.9500	0.2194	−0.5214	−1.610	1.051	0.2307	1.013	1.892
0.50	0.9385	0.2423	−0.4445	−1.471	1.063	0.2579	0.9244	1.656
0.55	0.9258	0.2647	−0.3739	−1.357	1.077	0.2855	0.8466	1.464
0.60	0.9120	0.2867	−0.3085	−1.260	1.092	0.3137	0.7775	1.303
0.65	0.8971	0.3081	−1.2076	−1.177	1.108	0.3425	0.7159	1.167
0.70	0.8812	0.3290	−0.1907	−1.103	1.126	0.3719	0.6605	1.050
0.75	0.8642	0.3492	−0.1372	−1.038	1.146	0.4020	0.6106	0.9496
0.80	0.9463	0.3688	−0.0868	−0.9781	1.167	0.4329	0.5653	0.8618
0.85	0.8274	0.3878	−0.0393	−0.9236	1.189	0.4646	0.5242	0.7847
0.90	0.8075	0.4059	−0.0056	−0.8731	1.213	0.4971	0.4867	0.7165
0.95	0.7868	0.4234	0.0481	−0.8258	1.239	0.5306	0.4524	0.6560
1.0	0.7625	0.4401	0.0883	−0.7812	1.266	0.5652	0.4210	0.6019
1.1	0.7196	0.4709	0.1622	−0.6981	1.326	0.6375	0.3656	0.5098
1.2	0.6711	0.4983	0.2281	−0.6211	1.394	0.7147	0.3185	0.4346
1.3	0.6201	0.5220	0.2865	−0.5485	1.469	0.7973	0.2782	0.3725
1.4	0.5669	0.5419	0.3379	−1.4791	1.553	0.8861	0.2437	0.3208
1.5	0.5118	0.5579	0.3824	−0.4123	1.647	0.9817	0.2138	0.2774
1.6	0.4554	0.5699	0.4204	−0.3476	1.750	1.085	0.1880	1.2406
1.7	0.3980	0.5778	0.4520	−0.2847	1.864	1.196	0.1655	1.2094
1.8	0.3400	0.5815	0.4774	−0.2237	1.990	1.317	0.1459	0.1826
1.9	0.2818	0.5812	0.4968	−0.1644	2.128	1.448	0.1288	0.1597
2.0	0.2239	0.5767	0.5104	−0.1070	2.280	1.591	0.1139	0.1399
2.1	0.1666	0.5683	0.5183	−0.0517	2.446	1.745	0.1008	0.1227
2.2	0.1104	0.5560	0.5208	−0.0015	2.629	1.914	0.0893	0.1079
2.3	0.0555	0.5399	0.5181	0.0523	2.830	2.098	0.0791	0.0950
2.4	0.0025	0.5202	0.5104	0.1005	3.049	2.298	0.0702	0.0837
2.5	−0.0484	0.4971	0.4981	0.1459	3.290	2.517	0.0623	0.0739
2.6	−0.0968	0.4708	0.4813	0.1884	3.553	2.755	0.0554	0.0653
2.7	−0.1424	0.4416	0.4605	0.2276	3.842	3.016	0.0493	0.0577
2.8	−0.1850	0.4097	0.4359	0.2635	4.157	3.301	0.0438	0.0511
2.9	−0.2243	0.3754	0.4079	0.2959	4.503	3.613	0.0390	0.0453
3.0	−0.2601	0.3391	0.3769	0.3247	4.881	3.953	0.0347	0.0402
3.2	−0.3202	0.2613	0.3071	0.3707	5.747	4.734	0.0276	0.0316
3.4	−0.6343	0.1792	0.2296	0.4010	6.785	5.670	0.0220	0.0250
3.6	−0.3918	0.0955	0.1477	0.4154	8.028	6.793	0.6175	0.0198
3.8	−0.4026	0.0128	0.0645	0.4141	9.517	8.140	0.0140	0.0157
4.0	−0.3971	−0.0660	−0.0169	0.3979	11.302	93759	0.0112	0.0125

C.3. Fungsi Gamma

Definisi:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \tag{C.41}$$

Sifat-sifat

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{C.42}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{C.43}$$

$$\Gamma(0) = \infty \tag{C.44}$$

C.4. Fungsi Error

Definisi:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{C.45}$$

Tabulasi data fungsi error dapat dilihat pada Tabel C.1.

Fungsi error komplementer

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt \tag{C.46}$$

Tabulasi data fungsi error dapat dilihat pada Tabel C.2.

C.5. Integral eksponensial

Definisi:

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\, dt \tag{C.47}$$

$$E_1(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t}\, dt = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \tag{C.48}$$

Sifat-sifat

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} \tag{C.49}$$

$$E_n'(x) = -E_{n-1}(x) \tag{C.50}$$

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1}\left[e^{-x} - xE_{n-1}(x)\right], \quad n > 1 \tag{C.51}$$

$$E_1(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n n!} \tag{C.52}$$

Tabel C.1. *Tabel fungsi Error*

X	ERF	X	ERF	X	ERF	X	ERF
.01	.011283415556	.46	.484655390002	.91	.801882825766	1.36	.945561436561
.02	.022564574692	.47	.493745050886	.92	.806767721548	1.37	.947312398035
.03	.033841222342	.48	.502749670695	.93	.811563558585	1.38	.949016035256
.04	.045111106145	.49	.511668261189	.94	.816271018976	1.39	.950673295805
.05	.056371977797	.50	.520499877813	.95	.820890807273	1.40	.952285119763
.06	.067621594393	.51	.529243619841	.96	.825423649644	1.41	.953852439360
.07	.078857719771	.52	.537898630479	.97	.829870293036	1.42	.955376178641
.08	.090078125841	.53	.546464096935	.98	.834231504340	1.43	.956857253145
.09	.101280593915	.54	.554939250456	.99	.838508069555	1.44	.958296569601
.10	.112462916018	.55	.563323366325	1.00	.842700792950	1.45	.959695025637
.11	.123622896199	.56	.571615763824	1.01	.846810496228	1.46	.961053509513
.12	.134758351820	.57	.579815806164	1.02	.850838017701	1.47	.962372899854
.13	.145867114836	.58	.587922900382	1.03	.854784211454	1.48	.963654065414
.14	.156947033063	.59	.595936497198	1.04	.858649946527	1.49	.964897864843
.15	.167995971427	.60	.603856090848	1.05	.862436106090	1.50	.966105146475
.16	.17901181319	.61	.611681218876	1.06	.866143586635	1.51	.967276748129
.17	.189992461202	.62	.619411461899	1.07	.869773297164	1.52	.968413496920
.18	.200935839019	.63	.627046443338	1.08	.873326158388	1.53	.969516209093
.19	.211839892158	.64	.634585829122	1.09	.876803101938	1.54	.970585689861
.20	.222702589210	.65	.642029327356	1.10	.880205069574	1.55	.971622733262
.21	.233521922982	.66	.649376687963	1.11	.883533012415	1.56	.972628122027
.22	.244295911599	.67	.656627702300	1.12	.886787890165	1.57	.973602627462
.23	.255022599592	.68	.663782202741	1.13	.889970670363	1.58	.974547009343
.24	.265700058954	.69	.670840062235	1.14	.893082327630	1.59	.975462015822
.25	.276326390168	.70	.677801193837	1.15	.896123842937	1.60	.976348383345
.26	.286899723216	.71	.684665550217	1.16	.899096202880	1.61	.977206836583
.27	.297418218547	.72	.691433123139	1.17	.902000398966	1.62	.978038088373
.28	.307880068029	.73	.698103942917	1.18	.904837426915	1.63	.978842839674
.29	.318283495861	.74	.704678077855	1.19	.907608285972	1.64	.979621779524
.30	.328626759459	.75	.711155633654	1.20	.910313978230	1.65	.980375585023
.31	.338908150311	.76	.717536752806	1.21	.912955507973	1.66	.981104921311
.32	.349125994796	.77	.723821613965	1.22	.915533881027	1.67	.981810441565
.33	.359278654974	.78	.730010431299	1.23	.918050104127	1.68	.982492787002
.34	.369364529345	.79	.736103453821	1.24	.920505184299	1.69	.983152586895
.35	.379382053562	.80	.742100964708	1.25	.922900128256	1.70	.983790458591
.36	.389329701129	.81	.748003280598	1.26	.925235941810	1.71	.984407007545
.37	.399205984043	.82	.753810750875	1.27	.927513629295	1.72	.985002827359
.38	.409009453420	.83	.759523756938	1.28	.929734193014	1.73	.985578499828
.39	.418738700070	.84	.765142711455	1.29	.931898632689	1.74	.986134594997
.40	.428392355047	.85	.770668057608	1.30	.934007944941	1.75	.986671671219
.41	.437969090155	.86	.776100268324	1.31	.936063122773	1.76	.987190275231
.42	.447467618426	.87	.781439845491	1.32	.938065155079	1.77	.987690942224
.43	.456886694550	.88	.786687319174	1.33	.940015026158	1.78	.988174195930
.44	.466225115278	.89	.791843246814	1.34	.941913715258	1.79	.988640548706
.45	.475481719787	.90	.796908212423	1.35	.943762196123	1.80	.989090501636

X	ERF	X	ERF	X	ERF	X	ERF
1.81	.989524544622	2.26	.998607121117	2.71	.999873162073	3.16	.999992138259
1.82	.989943156497	2.27	.998673872484	2.72	.999880261487	3.17	.999992641873
1.83	.990346805133	2.28	.998737661150	2.73	.999886985015	3.18	.999993114550
1.84	.990735947553	2.29	.998798606423	2.74	.999893351286	3.19	.999993558102
1.85	.991111030056	2.30	.998856823403	2.75	.999899378078	3.20	.999993974239
1.86	.991472488336	2.31	.998912423104	2.76	.999905082352	3.21	.999994364578
1.87	.991820747611	2.32	.998965512573	2.77	.999910480288	3.22	.999994730645
1.88	.992156222755	2.33	.999016195007	2.78	.999915587316	3.23	.999995073881
1.89	.992479318433	2.34	.999064569861	2.79	.999920418147	3.24	.999995395645
1.90	.992790429235	2.35	.999110732968	2.80	.999924986805	3.25	.999995697221
1.91	.993089939820	2.36	.999154776641	2.81	.999929306654	3.26	.999995979817
1.92	.993378225057	2.37	.999196789784	2.82	.999933390427	3.27	.999996244577
1.93	.993655650170	2.38	.999236857995	2.83	.999937250254	3.28	.999996492576
1.94	.993922570889	2.39	.999275063670	2.84	.999940897685	3.29	.999996724828
1.95	.994179333592	2.40	.999311486103	2.85	.999944343720	3.30	.999996942290
1.96	.994426275465	2.41	.999346201583	2.86	.999947598827	3.31	.999997145864
1.97	.994663724647	2.42	.999379283488	2.87	.999950672970	3.32	.999997336397
1.98	.994892000387	2.43	.999410802386	2.88	.999953575628	3.33	.999997514690
1.99	.995111413200	2.44	.999440826116	2.89	.999956315820	3.34	.999997681496
2.00	.995322265019	2.45	.999469419888	2.90	.999958902122	3.35	.999997837523
2.01	.995524849355	2.46	.999496646359	2.91	.999961342688	3.36	.999997983439
2.02	.995719451452	2.47	.999522565729	2.92	.999963645269	3.37	.999998119872
2.03	.995906348444	2.48	.999547235814	2.93	.999965817233	3.38	.999998247413
2.04	.996085809512	2.49	.999570712132	2.94	.999967865580	3.39	.999998366617
2.05	.996258096044	2.50	.999593047983	2.95	.999969796958	3.40	.999998478007
2.06	.996423461790	2.51	.999614294518	2.96	.999971617683	3.41	.999998582074
2.07	.996582153017	2.52	.999634500823	2.97	.999973333751	3.42	.999998679281
2.08	.996734408670	2.53	.999653713985	2.98	.999974950855	3.43	.999998770061
2.09	.996880460524	2.54	.999671979162	2.99	.999976474397	3.44	.999998854822
2.10	.997020533344	2.55	.999689339657	3.00	.999977909503	3.45	.999998933948
2.11	.997154845031	2.56	.999705836980	3.01	.999979261036	3.46	.999999007799
2.12	.997283606785	2.57	.999721510911	3.02	.999980533609	3.47	.999999076712
2.13	.997407023251	2.58	.999736399570	3.03	.999981731595	3.48	.999999141004
2.14	.997525292671	2.59	.999750539471	3.04	.999982859140	3.49	.999999200975
2.15	.997638607037	2.60	.999763965583	3.05	.999983920174	3.50	.999999256902
2.16	.997747152237	2.61	.999776711391	3.06	.999984918421	3.51	.999999309048
2.17	.997851108202	2.62	.999788808944	3.07	.999985857407	3.52	.999999357659
2.18	.997950649053	2.63	.999800288918	3.08	.999986740475	3.53	.999999402965
2.19	.998045943243	2.64	.999811180661	3.09	.999987570788	3.54	.999999445184
2.20	.998137153702	2.65	.999821512248	3.10	.999988351343	3.55	.999999484516
2.21	.998224437976	2.66	.999831310527	3.11	.999989084973	3.56	.999999521153
2.22	.998307948365	2.67	.999840601169	3.12	.999989774362	3.57	.999999555272
2.23	.998387832062	2.68	.999849408712	3.13	.999990422049	3.58	.999999587040
2.24	.998464231285	2.69	.999857756607	3.14	.999991030434	3.59	.999999616613
2.25	.998537283413	2.70	.999865667260	3.15	.999991601789	3.60	.999999644137

X	ERF	X	ERF	X	ERF	X	ERF
3.61	.999999669749	4.06	.999999990627	4.51	.999999999821	4.96	.999999999998
3.62	.999999693577	4.07	.999999991379	4.52	.999999999837	4.97	.999999999998
3.63	.999999715741	4.08	.999999992072	4.53	.999999999851	4.98	.999999999998
3.64	.999999736353	4.09	.999999992711	4.54	.999999999864	4.99	.999999999998
3.65	.999999755517	4.10	.999999993300	4.55	.999999999876	5.00	.999999999998
3.66	.999999773333	4.11	.999999993842	4.56	.999999999887	5.01	.999999999999
3.67	.999999789891	4.12	.999999994342	4.57	.999999999897	5.02	.999999999999
3.68	.999999805277	4.13	.999999994802	4.58	.999999999906	5.03	.999999999999
3.69	.999999819571	4.14	.999999995225	4.59	.999999999915	5.04	.999999999999
3.70	.999999832849	4.15	.999999995615	4.60	.999999999999	3.05	.999999999999
3.71	.999999845179	4.16	.999999995974	4.61	.999999999929	5.06	.999999999999
3.72	.999999856628	4.17	.999999996304	4.62	.999999999936	5.07	.999999999999
3.73	.999999867256	4.18	.999999996608	4.63	.999999999942	5.08	.999999999999
3.74	.999999877120	4.19	.999999996888	4.64	.999999999947	5.09	.999999999999
3.75	.999999886273	4.20	.999999997145	4.65	.999999999952	5.10	.999999999999
3.76	.999999894764	4.21	.999999997381	4.66	.999999999956	5.11	1.00000000000
3.77	.999999902641	4.22	.999999997598	4.67	.999999999960	5.12	1.00000000000
3.78	.999999909945	4.23	.999999997798	4.68	.999999999964	5.13	1.00000000000
3.79	.999999916718	4.24	.999999997981	4.69	.999999999967	5.14	1.00000000000
3.80	.999999922996	4.25	.999999998149	4.70	.999999999970	5.15	1.00000000000
3.81	.999999928815	4.26	.999999998304	4.71	.999999999973	5.16	1.00000000000
3.82	.999999934207	4.27	.999999998446	4.72	.999999999975	5.17	1.00000000000
3.83	.999999939202	4.28	.999999998577	4.73	.999999999978	5.18	1.00000000000
3.84	.999999943829	4.29	.999999998697	4.74	.999999999980	5.19	1.00000000000
3.85	.999999948114	4.30	.999999998807	4.75	.999999999982	5.20	1.00000000000
3.86	.999999952081	4.31	.999999998907	4.76	.999999999983	5.21	1.00000000000
3.87	.999999955754	4.32	.999999999000	4.77	.999999999985	5.22	1.00000000000
3.88	.999999959153	4.33	.999999999085	4.78	.999999999986	5.23	1.00000000000
3.89	.999999962298	4.34	.999999999163	4.79	.999999999987	5.24	1.00000000000
3.90	.999999965208	4.35	.999999999234	4.80	.999999999989	5.25	1.00000000000
3.91	.999999967899	4.36	.999999999299	4.81	.999999999990	5.26	1.00000000000
3.92	.999999970388	4.37	.999999999359	4.82	.999999999991	5.27	1.00000000000
3.93	.999999972690	4.38	.999999999414	4.83	.999999999992	5.28	1.00000000000
3.94	.999999974817	4.39	.999999999465	4.84	.999999999992	5.29	1.00000000000
3.95	.999999976783	4.40	.999999999511	4.85	.999999999993	5.30	1.00000000000
3.96	.999999978600	4.41	.999999999553	4.86	.999999999994	5.31	1.00000000000
3.97	.999999980279	4.42	.999999999592	4.87	.999999999994	5.32	1.00000000000
3.98	.999999981829	4.43	.999999999627	4.88	.999999999995	5.33	1.00000000000
3.99	.999999983261	4.44	.999999999659	4.89	.999999999995	5.34	1.00000000000
4.00	.999999984583	4.45	.999999999689	4.90	.999999999996	5.35	1.00000000000
4.01	.999999985803	4.46	.999999999716	4.91	.999999999996	5.36	1.00000000000
4.02	.999999986929	4.47	.999999999741	4.92	.999999999997	5.37	1.00000000000
4.03	.999999987969	4.48	.999999999764	4.93	.999999999997	5.38	1.00000000000
4.04	.999999988927	4.49	.999999999784	4.94	.999999999997	5.39	1.00000000000
4.05	.999999989812	4.50	.999999999803	4.95	.999999999997	5.40	1.00000000000

Tabel C.2. *Tabel fungsi Error Komplementer*

		Complementary Error Function Table											
x	**erfc(x)**	**x**	**erfc(x)**	**x**	**erfc(x)**	**x**	**erfc(x)**	**x**	**erfc(x)**	**x**	**erfc(x)**	**x**	**erfc(x)**
0	1.000000	0.5	0.479500	1	0.157299	1.5	0.033895	2	0.004678	2.5	0.000407	3	0.00002209
0.01	0.988717	0.51	0.470756	1.01	0.153190	1.51	0.032723	2.01	0.004475	2.51	0.000386	3.01	0.00002074
0.02	0.977435	0.52	0.462101	1.02	0.149162	1.52	0.031587	2.02	0.004281	2.52	0.000365	3.02	0.00001947
0.03	0.966159	0.53	0.453536	1.03	0.145216	1.53	0.030484	2.03	0.004094	2.53	0.000346	3.03	0.00001827
0.04	0.954889	0.54	0.445061	1.04	0.141350	1.54	0.029414	2.04	0.003914	2.54	0.000328	3.04	0.00001714
0.05	0.943628	0.55	0.436677	1.05	0.137564	1.55	0.028377	2.05	0.003742	2.55	0.000311	3.05	0.00001608
0.06	0.932378	0.56	0.428384	1.06	0.133856	1.56	0.027372	2.06	0.003577	2.56	0.000294	3.06	0.00001508
0.07	0.921142	0.57	0.420184	1.07	0.130227	1.57	0.026397	2.07	0.003418	2.57	0.000278	3.07	0.00001414
0.08	0.909922	0.58	0.412077	1.08	0.126674	1.58	0.025453	2.08	0.003266	2.58	0.000264	3.08	0.00001326
0.09	0.898719	0.59	0.404064	1.09	0.123197	1.59	0.024538	2.09	0.003120	2.59	0.000249	3.09	0.00001243
0.1	0.887537	0.6	0.396144	1.1	0.119795	1.6	0.023652	2.1	0.002979	2.6	0.000236	3.1	0.00001165
0.11	0.876377	0.61	0.388319	1.11	0.116467	1.61	0.022793	2.11	0.002845	2.61	0.000223	3.11	0.00001092
0.12	0.865242	0.62	0.380589	1.12	0.113212	1.62	0.021962	2.12	0.002716	2.62	0.000211	3.12	0.00001023
0.13	0.854133	0.63	0.372954	1.13	0.110029	1.63	0.021157	2.13	0.002593	2.63	0.000200	3.13	0.00000958
0.14	0.843053	0.64	0.365414	1.14	0.106918	1.64	0.020378	2.14	0.002475	2.64	0.000189	3.14	0.00000897
0.15	0.832004	0.65	0.357971	1.15	0.103876	1.65	0.019624	2.15	0.002361	2.65	0.000178	3.15	0.00000840
0.16	0.820988	0.66	0.350623	1.16	0.100904	1.66	0.018895	2.16	0.002253	2.66	0.000169	3.16	0.00000786
0.17	0.810008	0.67	0.343372	1.17	0.098000	1.67	0.018190	2.17	0.002149	2.67	0.000159	3.17	0.00000736
0.18	0.799064	0.68	0.336218	1.18	0.095163	1.68	0.017507	2.18	0.002049	2.68	0.000151	3.18	0.00000689
0.19	0.788160	0.69	0.329160	1.19	0.092392	1.69	0.016847	2.19	0.001954	2.69	0.000142	3.19	0.00000644
0.2	0.777297	0.7	0.322199	1.2	0.089686	1.7	0.016210	2.2	0.001863	2.7	0.000134	3.2	0.00000603
0.21	0.766478	0.71	0.315335	1.21	0.087045	1.71	0.015593	2.21	0.001776	2.71	0.000127	3.21	0.00000564
0.22	0.755704	0.72	0.308567	1.22	0.084466	1.72	0.014997	2.22	0.001692	2.72	0.000120	3.22	0.00000527
0.23	0.744977	0.73	0.301896	1.23	0.081950	1.73	0.014422	2.23	0.001612	2.73	0.000113	3.23	0.00000493
0.24	0.734300	0.74	0.295322	1.24	0.079495	1.74	0.013865	2.24	0.001536	2.74	0.000107	3.24	0.00000460
0.25	0.723674	0.75	0.288845	1.25	0.077100	1.75	0.013328	2.25	0.001463	2.75	0.000101	3.25	0.00000430
0.26	0.713100	0.76	0.282463	1.26	0.074764	1.76	0.012810	2.26	0.001393	2.76	0.000095	3.26	0.00000402
0.27	0.702582	0.77	0.276179	1.27	0.072486	1.77	0.012309	2.27	0.001326	2.77	0.000090	3.27	0.00000376
0.28	0.692120	0.78	0.269990	1.28	0.070266	1.78	0.011826	2.28	0.001262	2.78	0.000084	3.28	0.00000351
0.29	0.681717	0.79	0.263897	1.29	0.068101	1.79	0.011359	2.29	0.001201	2.79	0.000080	3.29	0.00000328
0.3	0.671373	0.8	0.257899	1.3	0.065992	1.8	0.010909	2.3	0.001143	2.8	0.000075	3.3	0.00000306
0.31	0.661092	0.81	0.251997	1.31	0.063937	1.81	0.010475	2.31	0.001088	2.81	0.000071	3.31	0.00000285
0.32	0.650874	0.82	0.246189	1.32	0.061935	1.82	0.010057	2.32	0.001034	2.82	0.000067	3.32	0.00000266
0.33	0.640721	0.83	0.240476	1.33	0.059985	1.83	0.009653	2.33	0.000984	2.83	0.000063	3.33	0.00000249
0.34	0.630635	0.84	0.234857	1.34	0.058086	1.84	0.009264	2.34	0.000935	2.84	0.000059	3.34	0.00000232
0.35	0.620618	0.85	0.229332	1.35	0.056238	1.85	0.008889	2.35	0.000889	2.85	0.000056	3.35	0.00000216
0.36	0.610670	0.86	0.223900	1.36	0.054439	1.86	0.008528	2.36	0.000845	2.86	0.000052	3.36	0.00000202
0.37	0.600794	0.87	0.218560	1.37	0.052688	1.87	0.008179	2.37	0.000803	2.87	0.000049	3.37	0.00000188
0.38	0.590991	0.88	0.213313	1.38	0.050984	1.88	0.007844	2.38	0.000763	2.88	0.000046	3.38	0.00000175
0.39	0.581261	0.89	0.208157	1.39	0.049327	1.89	0.007521	2.39	0.000725	2.89	0.000044	3.39	0.00000163
0.4	0.571608	0.9	0.203092	1.4	0.047715	1.9	0.007210	2.4	0.000689	2.9	0.000041	3.4	0.00000152
0.41	0.562031	0.91	0.198117	1.41	0.046148	1.91	0.006910	2.41	0.000654	2.91	0.000039	3.41	0.00000142
0.42	0.552532	0.92	0.193232	1.42	0.044624	1.92	0.006622	2.42	0.000621	2.92	0.000036	3.42	0.00000132
0.43	0.543113	0.93	0.188437	1.43	0.043143	1.93	0.006344	2.43	0.000589	2.93	0.000034	3.43	0.00000123
0.44	0.533775	0.94	0.183729	1.44	0.041703	1.94	0.006077	2.44	0.000559	2.94	0.000032	3.44	0.00000115
0.45	0.524518	0.95	0.179109	1.45	0.040305	1.95	0.005821	2.45	0.000531	2.95	0.000030	3.45	0.00000107
0.46	0.515345	0.96	0.174576	1.46	0.038946	1.96	0.005574	2.46	0.000503	2.96	0.000028	3.46	0.00000099
0.47	0.506255	0.97	0.170130	1.47	0.037627	1.97	0.005336	2.47	0.000477	2.97	0.000027	3.47	0.00000092
0.48	0.497250	0.98	0.165769	1.48	0.036346	1.98	0.005108	2.48	0.000453	2.98	0.000025	3.48	0.00000086
0.49	0.488332	0.99	0.161492	1.49	0.035102	1.99	0.004889	2.49	0.000429	2.99	0.000024	3.49	0.00000080

Lampiran D

Data Tampang Lintang

D.1. Tampang lintang beberapa nuklida yang penting

Atomic number	Nuclide	Abundance a/o	Half-life*	σ_a, † barns	σ_f, ‡ barns
0	n		12 m		
1	^{1}H	99.985		333 mb	
	^{2}H	0.015		0.53 mb	
	^{3}H		12.33 y		
3	^{6}Li	92.5		941	
	^{7}Li	7.42		45.7 mb	
5	^{10}B	19.6		3840	
	^{11}B	80.4		5.5 mb	
6	^{12}C	98.89		3.4 mb	
	^{12}C	1.11		1.37 mb	
	^{14}C		5736 y		
7	^{14}N	99.64		1.9	
	^{15}N	0.36		24 μb	
8	^{16}O	99.756		0.190 mb	
	^{17}O	0.039		0.239	
	^{18}O	0.204		0.16 mb	
53	^{135}I		6.7 h		
54	^{135}Xe		9.17 h	2.65×10^{6}‡	
61	^{143}Pm		53.1 h		
62	^{149}Sm	13.83		41,000‡	
90	^{232}Th	100	1.41×10^{10} y	5.13	
	^{233}Th		23.3 m	1465	15
92	^{233}U		1.592×10^{5} y	575‡	529‡
	^{234}U	0.0055	2.46×10^{5} y	103.47	0.465
	^{235}U	0.72	7.038×10^{8} y	687.0‡	587‡
	^{236}U		2.34×10^{7} y	5.2	
	^{238}U	99.27	4.68×10^{9} y	2.73‡	
	^{239}U		23.5 m	36	14
94	^{239}Pu		24110 y	1020‡	749‡
	^{240}Pu		6564 y	289.5	0.064
	^{241}Pu		14.35 y	1378	1015
	^{242}Pu		3.733×10^{5} y	10.3	<0.002

*m = minute, h = hour, y = year.
†Cross sections at 0.0253 eV or 2200 m/sec.
‡Non-1/v absorber, see table 3.2 for non-1/v factor.

D.2. Sifat-sifat unsur dan beberapa molekul

Element or Molecule	Symbol	Atomic Number	Atomic or Molecular Weight*	Nominal Density, g/cm^3	Atoms or Molecules per cm^3† ($\times 10^{24}$)	σ_a,‡barns	σ_s,‡ barns	Σ_a,†cm^{-1}	Σ_s,‡ cm^{-1}
Actinium	Ac	89	227			515			
Aluminum	Al	13	26.9815	2.699	0.06024	0.230	1.49	0.01386	0.08976
Antimony	Sb	51	121.75	6.62	0.03275	5.4	4.2	0.1769	0.1376
Argon	Ar	18	39.948	Gas		0.678	0.644		
Arsenic	As	33	74.9216	5.73	0.04606	4.3	7	0.1981	0.3224
Barium	Ba	56	137.34	3.5	0.01535	1.2		0.01842	
Beryllium	Be	4	9.0122	1.85	0.1236	0.0092	6.14	0.001137	0.7589
Bismuth	Bi	83	208.980	9.80	0.02824	0.033		0.0009319	
Boron	B	5	10.811	2.3	0.1281	759	3.6	97.23	0.4612
Bromine	Br	35	79.909	3.12	0.02351	6.8	6.1	0.1599	0.1434
Cadmium	Cd	48	112.40	8.65	0.04635	2450	5.6	113.56	0.2596
Calcium	Ca	20	40.08	1.55	0.02329	0.43		0.01001	
Carbon (graphite)	C	6	12.01115	1.60	0.08023	0.0034	4.75	0.0002728	0.3811
Cerium	Ce	58	140.12	6.78	0.02914	0.63	4.7	0.01836	0.1370
Cesium	Cs	55	132.905	1.9	0.008610	29.0		0.2497	
Chlorine	Cl	17	35.453	Gas		33.2			
Chromium	Cr	24	51.996	7.19	0.08328	3.1	3.8	0.2582	0.3165
Cobalt	Co	27	58.9332	8.8	0.08993	37.2	6.7	3.345	0.6025
Copper	Cu	29	63.54	8.96	0.08493	3.79	7.9	0.3219	0.6709
Deuterium	D	1	2.01410	Gas		0.00053			
Dysprosium	Dy	66	162.50	8.56	0.03172	930	100	29.50	3.172
Erbium	Er	68	167.26	9.16	0.03203	162	11.0	5.189	0.3523
Europium	Eu	63	151.96	5.22	0.02069	4600	8.0	95.17	0.1655
Fluorine	F	9	18.9984	Gas		0.0095	4.0		

(continued)

Element or Molecule	Symbol	Atomic Number	Atomic or Molecular Weight*	Nominal Density, g/cm^3	Atoms or Molecules per cm^3† ($\times 10^{24}$)	σ_a, ‡barns	σ_s,‡ barns	Σ_a,†cm^{-}	Σ_s,‡ cm^{-1}
Gadolinium	Gd	64	157.25	7.95	0.03045	49000		1492	
Gallium	Ga	31	69.72	5.91	0.05105	2.9	6.5	0.1480	0.3318
Germanium	Ge	32	72.59	5.36	0.04447	2.3	7.5	0.1023	0.3335
Gold	Au	79	196.967	19.32	0.05907	98.8		5.836	
Hafnium	Hf	72	178.49	13.36	0.04508	102	8	4.598	0.3606
Heavy water	D_2O		20.0276	1.105	0.03323	0.00133	13.6	4.420×10^{-5}	0.4519
Helium	He	2	4.0026	Gas		< 0.05			
Holmium	Ho	67	164.930	8.76	0.03199	66.5	9.4	2.127	0.3007
Hydrogen	H	1	1.00797	Gas		0.332			
Indium	In	49	114.82	7.31	0.03834	193.5		7.419	
Iodine	I	53	126.9044	4.93	0.02340	6.2		0.1451	
Iridium	Ir	77	192.2	22.5	0.07050	426	14	30.03	0.9870
Iron	Fe	26	55.847	7.87	0.08487	2.55	10.9	0.2164	0.9251
Krypton	Kr	36	83.80	Gas		25.0	7.50		
Lanthanum	La	57	138.91	6.19	0.02684	9.0	9.3	0.2416	0.2496
Lead	Pb	82	207.19	11.34	0.03296	0.170	11.4	0.005603	0.3757
Lithium	Li	3	6.942	0.53	0.04600	70.7		3.252	
Lutetium	Lu	71	174.97	9.74	0.03353	77	8	2.581	0.2682
Magnesium	Mg	12	24.3050	1.74	0.04310	0.063	3.42	0.002715	0.1474
Manganese	Mn	25	54.9380	7.43	0.08145	13.3	2.1	1.083	0.1710
Mercury	Hg	80	200.59	13.55	0.04068	375		15.26	
Molybdenum	Mo	42	95.94	10.2	0.06403	2.65	5.8	0.1697	0.3714
Neodymium	Nd	60	144.24	6.98	0.02914	50.5	16	1.472	0.4662
Neon	Ne	10	20.1797	Gas		0.038	2.42		
Nickel	Ni	28	58.71	8.90	0.09130	4.43	17.3	0.4045	1.579
Niobium	Nb	41	92.906	8.57	0.05555	1.15		0.06388	

Nitrogen	N	7	14.0067	Gas		1.85	10.6		
Osmium	Os	76	190.2	22.5	0.07124	15.3		1.090	
Oxygen	O	8	15.9994	Gas		0.00027	3.76		
Palladium	Pd	46	106.4	12.0	0.06792	6.9	5.0	0.4686	0.3396
Phosphorus (yellow)	P	15	30.9738	1.82	0.03539	0.180		0.006370	
Platinum	Pt	78	195.09	21.45	0.06622	10.0	11.2	0.622	0.7167
Plutonium	Pu	94	239.0522	19.6	0.04938	$\sigma_a = 1011.3$	7.7	49.93	0.3902
Polonium	Po	84	209	9.51	0.02727	$\sigma_f = 742.5$		36.66	
Potassium	K	19	39.095	0.86	0.01325	2.10	1.5	0.02783	0.01988
Praseodymium	Pr	59	140.907	6.78	0.02898	11.5	3.3	0.3333	0.09563
Promethium	Pm	61	145						
Protactinium	Pa	91	231.0359			210			
Radium	Ra	88	226.0254	5.0	0.01332	11.5		0.1532	
Rhenium	Re	75	186.2	20	0.06596	88	11.3	5.804	0.7453
Rhodium	Rh	45	102.905	12.41	0.07263	150		10.89	
Rubidium	Rb	37	85.47	1.53	0.01078	0.37	6.2	0.003989	0.06684
Ruthenium	Ru	44	101.07	12.2	0.07270	2.56		0.1861	
Samarium	Sm	62	150.35	6.93	0.02776	5800		161.0	
Scandium	Sc	21	44.956	2.5	0.03349	26.5	24	0.8875	0.8038
Selenium	Se	34	78.96	4.81	0.03669	11.7	9.7	0.4293	0.3559
Silicon	Si	14	28.086	2.33	0.04996	0.16	2.2	0.007994	0.1099
Silver	Ag	47	107.870	10.49	0.05857	63.6		3.725	
Sodium	Na	11	22.9898	0.97	0.02541	0.530	3.2	0.01347	0.08131
Strontium	Sr	38	87.62	2.6	0.01787	0.530	10	0.02162	0.1787
Sulfur (yellow)	S	16	32.064	2.07	0.03888	0.520	0.975	0.02022	0.03791
Tantalum	Ta	73	180.948	16.6	0.05525	21.0	6.2	1.160	0.3426
Technetium	Tc	43	99			19			
Tellurium	Te	52	127.60	6.24	0.02945	4.7		0.1384	
Terbium	Tb	65	158.925	8.33	0.03157	25.5	20	0.8050	0.6314

(*continued*)

Element or Molecule	Symbol	Atomic Number	Atomic or Molecular Weight*	Nominal Density, g/cm^3	Atomic or Molecules per cm^3† ($\times 10^{24}$)	σ_a,‡ barns	σ_s,‡ barns	Σ_a, †cm^{-1}	Σ_s,‡ cm^{-1}
Thallium	Tl	81	204.37	11.85	0.03492	3.4	9.7	0.1187	0.3387
Thorium	Th	90	232.038	11.71	0.03039	7.40	12.67	0.2249	0.3850
Thulium	Tm	69	168.934	9.35	0.03314	103	12	3.413	0.3977
Tin	Sn	50	118.69	7.298	0.03703	0.63		0.02333	
Titanium	Ti	22	47.90	4.51	0.05670	6.1	4.0	0.3459	0.2268
Tungsten	W	74	183.85	19.2	0.06289	18.5		1.163	
Uranium	U	92	238.03	19.1	0.04833	$\sigma_a = 7.59$	8.90	0.3668	0.4301
						$\sigma_f = 4.19$		0.2025	
Vanadium	V	23	50.942	6.1	0.07212	5.04	4.93	0.3635	0.3556
Water	H_2O		18.0153	1.0	0.03343	0.664	103	0.02220	3.443
Xenon	Xe	54	131.30	Gas		24.5	4.30		
Ytterbium	Yb	70	173.04	7.01	0.02440	36.6	25.0	0.8930	0.6100
Yttrium	Y	39	88.906	5.51	0.03733	1.28	7.60	0.04778	0.2837
Zinc	Zn	30	65.37	7.133	0.06572	1.10	4.2	0.07230	0.2760
Zirconium	Zr	40	91.22	6.5	0.04291	0.185	6.40	0.007938	0.2746

*Based on $^{12}C = 12.00000$.

†Four-digit accuracy for computational purposes only; last digit(s) usually is not meaningful.

‡Cross-sections at 0.0253 eV or 2200 m/sec. The scattering cross sections, except for those of H_2O and D_2O, are measured values in a thermal neutron spectrum and are assumed to be 0.0253 eV values because σ_s is usually constant at thermal energies. The errors in σ_s tend to be large, and the tabulated values of σ_s should be used with caution. (From BNL-325, 3rd ed., 1973).

The value of σ_a given in the table is for pure graphite. Commercial, reactor-grade graphite contains verying amounts of contaminants and σ_a is somewhat larger, say, about 0.0048 barns, so that $\Sigma_a \cong 0.0003851$ cm^{-1}

The value of σ_a given in the table is for pure D_2O. Commercially available heavy water contains small amounts of ordinary water and σ_a in this case is somewhat larger.

Pustaka

Sebagian besar dari materi ini dikompilasi dari beberapa sumber, terutama tiga buah buku acuan sebagai berikut:

1. Stacey, W.M., *Nuclear Reactor Physics*, John Wiley & Sons, New York, 2003.
2. Duderstadt, J.J., Hamilton, L.J., *Nuclear Reactor Analysis*, John wiley & Sons, New York, 1976.
3. Lamarsh, J.R., *Introduction to Nuclear Reactor Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

Beberapa pustaka juga dijadikan acuan dalam penulisan diktat ini dan pembaca disarankan pula untuk membaca buku-buku tersebut sebagai materi pengkayaan.

1. Case, K. M., de Hoffmann, F., Placzek, G., *Introduction to The Theory of Neutron Diffusion*, Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico, 1953.
2. BNL-5800, *Reactor Physics Constants*, United States Atomic Energy Commission, Chicago, 1963.
3. Weinberg, A. M., Wigner, E. P, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, University of Chicago Press, Chicago, 1958.
4. Ott, K. O., Bezella, W. A., *Introductory Nuclear Reactor Statics*, American Nuclear Society, La Grange Park, Illinois, 1989.
5. Glasstone, S., Sesonske, A., *Nuclear Reactor Engineering*, Van Nostrand Rheinhold Company, New York, 1981.
6. Graves, H. W., *Nuclear Fuel Management*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
7. Mughabghab, S. F., *Atlas of Neutron Resonances: Resonance Parameters and Thermal Cross Sections Z = 1–100*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
8. Hoogenboom, J. E., van Dam, H., *Kernreactorkunde*, collegedictaat tn391, Technische Universiteit Delft, Delft, 1998.
9. Kugeler, K., *Reaktortechnik I & III*, RWTH Aachen, Aachen, 1994.
10. US-DOE, *DOE Fundamentals Handbook: Nuclear Physics and Reactor Theory. Volume 2*, DOE-HDBK-1019/2-93, Washington D.C., 1993.